Fonctions Analytiques et Transformations de Möbius

Analyse complexe : de l'holomorphie à la sphère de Riemann

Cours synthétique

Introduction

Ce document présente les fondements de l'analyse complexe : la notion de fonction analytique (holomorphe), ses multiples caractérisations équivalentes, le principe d'identité qui illustre la **rigidité** des fonctions holomorphes, les applications conformes, puis la géométrie du plan complexe étendu via la **sphère de Riemann** et les **transformations de Möbius**.

Table des matières

1 Fonctions analytiques et holomorphes

Définition

Une fonction complexe $f : D \subseteq \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ est dite **analytique** (ou **holomorphe**) en un point $z_0 \in D$ si elle est dérivable au sens complexe dans un voisinage ouvert de z_0.
Autrement dit, il existe un rayon $R > 0$ tel que f est dérivable pour tout z vérifiant $|z - z_0| < R$.

Idée clé

La dérivabilité complexe est une condition **beaucoup plus forte** que la dérivabilité réelle. La limite

$$f'(z_0) = \lim_{h \to 0} \frac{f(z_0 + h) - f(z_0)}{h}$$

doit exister et être la même quelle que soit la direction par laquelle $h \to 0$ dans le plan complexe (axe réel, axe imaginaire, ou toute autre direction).

2 Caractérisations équivalentes

Théorème

Soit f une fonction définie sur un ouvert $D \subseteq \mathbb{C}$. Les propriétés suivantes sont équivalentes :

1. **Dérivabilité complexe locale** : $f'(z_0)$ existe pour tout z_0 dans un voisinage.
2. **Développement en série entière** : autour de chaque z_0, f s'écrit comme une série de Taylor convergente :

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n, \quad \text{pour } |z - z_0| < R.$$

3. **Indéfinie dérivabilité** : f est de classe C^∞ (dérivable à tout ordre) sur son domaine.
4. **Équations de Cauchy-Riemann** : si $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$, alors u et v sont de classe C^1 et vérifient les équations de Cauchy-Riemann.

Équations de Cauchy-Riemann

Si $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ où $z = x + iy$, alors f est holomorphe si et seulement si :

$$\boxed{\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} \quad \text{et} \quad \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}}$$

Idée clé

En analyse complexe, la simple dérivabilité locale implique **automatiquement** la développabilité en série entière et la régularité C^∞. C'est pourquoi les termes *holomorphe* et *analytique* sont strictement synonymes — ce qui serait faux en analyse réelle !

3 Connexité et Principe d'identité

Ouvert connexe et Domaine

Un ouvert $D \subseteq \mathbb{C}$ est dit **connexe** (plus précisément, connexe par arcs) si deux points quelconques de D peuvent être reliés par un chemin continu entièrement contenu dans D. En analyse complexe, un ouvert connexe est souvent appelé un **domaine**.

Principe d'identité

Soit D un ouvert **connexe** de $\mathbb{C}$ et f, g deux fonctions holomorphes sur D. Si l'ensemble des points où $f(z) = g(z)$ admet un **point d'accumulation** dans D (par exemple, si f et g coïncident sur une suite convergente ou un petit disque), alors :

$$f(z) = g(z) \quad \text{pour } \textbf{tout } z \in D.$$

Attention

La condition de **connexité** est cruciale. Sans elle, deux fonctions pourraient coïncider sur une composante connexe et être totalement différentes sur une autre.
Ce théorème illustre la **rigidité** des fonctions holomorphes : elles sont entièrement déterminées par leur comportement sur un ensemble infiniment petit. Une fonction holomorphe ne peut pas être « plate » sur un morceau sans l'être partout.

4 Applications conformes

Application conforme

Une fonction holomorphe $f : D \to \mathbb{C}$ est dite **conforme** en un point $z_0 \in D$ si elle préserve les angles orientés et le sens de parcours entre deux courbes régulières se croisant en z_0.

Théorème

Une fonction holomorphe f est conforme en z_0 si et seulement si sa dérivée complexe est non nulle en ce point :

$$\boxed{f'(z_0) \neq 0}$$

Points critiques

Les points où $f'(z_0) = 0$ sont appelés **points critiques**. En ces points, la fonction n'est pas conforme : les angles sont multipliés par un entier $k \geq 2$, où k est l'ordre de la première dérivée non nulle.
Par exemple, $f(z) = z^2$ a un point critique en $z = 0$: les angles y sont doublés.

5 Fonctions entières et exemples classiques

Fonction entière

Une fonction est dite **entière** si elle est analytique sur **tout** le plan complexe $\mathbb{C}$ (qui est un ouvert connexe).

Exemple

- **Fonctions entières** : e^z, $\sin z$, $\cos z$, et tous les polynômes.
- **Fonctions analytiques (mais pas entières)** :
  - $\frac{1}{z}$ sur le domaine $\mathbb{C} \setminus \{0\}$ (pôle en 0)
  - $\log z$ sur le domaine $\mathbb{C} \setminus (-\infty, 0]$ (coupure le long de l'axe réel négatif)

Trigonométrie complexe

Les fonctions trigonométriques complexes sont définies par :

$$\cos z = \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2} \quad \text{et} \quad \sin z = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i}$$

Les fonctions e^{iz} et e^{-iz} sont entières (compositions de fonctions entières). Une somme ou soustraction de fonctions entières restant entière, $\sin z$ et $\cos z$ sont donc entières.

6 Sphère de Riemann et Cercles Généralisés

Sphère de Riemann

On note $\hat{\mathbb{C}} = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$ le **plan complexe étendu**. Géométriquement, $\hat{\mathbb{C}}$ peut être identifié à la **sphère de Riemann** $\mathbb{S}^2$ (une sphère unité dans $\mathbb{R}^3$) via la *projection stéréographique*.
Dans cette identification :

- Le plan complexe $\mathbb{C}$ est tangent au **pôle sud** de la sphère.
- Le point à l'infini ∞ correspond au **pôle nord**.

7 La Compactification

Pourquoi compactifier ?

L'infini est un concept « malcommode » en mathématiques. La **compactification** consiste à **domestiquer l'infini** en le transformant en un point comme les autres. **Bénéfices concrets** : Simplification des limites, continuité restaurée pour $1/z$, unification des droites et cercles.

Parallèle : $\overline{\mathbb{R}}$ vs $\hat{\mathbb{C}}$

Il existe deux façons principales de ajouter des points à l'infini :

- **La droite réelle achevée** : $\overline{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$ (**deux points**)
- **Le plan complexe étendu** : $\hat{\mathbb{C}} = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$ (**un seul point**)

Droite réelle achevée

La **droite réelle achevée** est l'ensemble $\overline{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$ muni d'un ordre total tel que $-\infty < x < +\infty$.

Plan complexe étendu

Le **plan complexe étendu** $\hat{\mathbb{C}} = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$ n'a qu'**un seul point à l'infini**, car toutes les directions de fuite convergent vers le pôle nord de la sphère.

Pourquoi un seul infini ?

Considérons une suite (z_n). On dit que $z_n \to \infty$ si $|z_n| \to +\infty$. Peu importe la direction (θ), le module s'échappe de la même manière sur la sphère.

Méthode de compactification

Pour $\mathbb{R}$: On ajoute deux bouchons distinctes ($-\infty$ et $+\infty$).
Pour $\mathbb{C}$: On ajoute un bouchon unique (∞) via Alexandrov.

Comparaison des compactifications

Droite réelle achevée	**Plan complexe étendu**
$\overline{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$	$\hat{\mathbb{C}} = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$
Deux points à l'infini	**Un seul point** à l'infini
Ordre total préservé	Pas d'ordre total

Asymptotes

Sur $\mathbb{R}$, $1/x$ a deux limites distinctes (0^+ et 0^-). Sur $\mathbb{C}$, $1/z \to 0$ de manière unique.

Attention

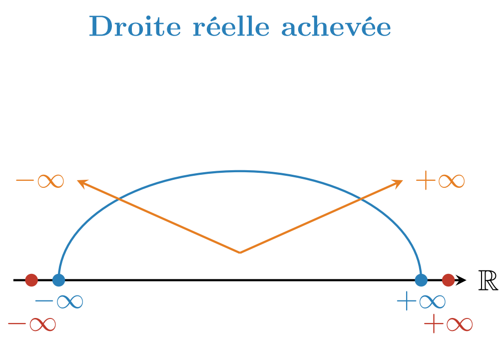
$\hat{\mathbb{C}}$ n'est pas ordonné. Ne comparez jamais deux complexes ou un complexe avec ∞ via des opérateurs d'inégalité ($<$ ou $>$).

Géométrie

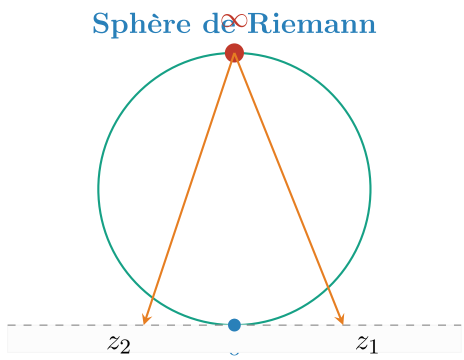
Compactifier une ligne nécessite 2 points. Compactifier un plan (2D) par un point unique engendre topologiquement une sphère $\mathbb{S}^2$.

Récapitulatif topologique

$\overline{\mathbb{R}}$ et $\hat{\mathbb{C}}$ sont compacts. Toute suite y admet une sous-suite convergente.



Deux points distincts



Un seul point à l'infini

Cercles généralisés

Un cercle généralisé est soit un cercle usuel de $\mathbb{C}$, soit une droite affine (cercle passant par ∞).

Équation générale

$A|z|^2 + Bz + \overline{B}\,\overline{z} + C = 0$ ($A, C \in \mathbb{R}$; $B \in \mathbb{C}$). Si $A = 0$, c'est une droite.

8 Transformations de Möbius

Définition

Une transformation de Möbius est une application de la forme $\boxed{f(z) = \dfrac{az+b}{cz+d}}$ avec $ad - bc \neq 0$.

Idée clé

Elles forment le groupe $\mathrm{PGL}(2, \mathbb{C})$ et se décomposent en translations, dilatations-rotations et inversions.

Théorème

Toute transformation de Möbius envoie un cercle généralisé sur un cercle généralisé.

Preuve par décomposition

En substituant $w = 1/z$ dans $A|z|^2 + Bz + \overline{B}\,\overline{z} + C = 0$, on obtient $C|w|^2 + \overline{B}w + B\overline{w} + A = 0$, ce qui conserve la forme structurelle.

Géométrie globale

Sur la sphère $\mathbb{S}^2$, cela revient à des projections d'intersections de plans, ce qui préserve nativement la circularité.

Inversion

L'image de la droite verticale $x = 1$ par $1/z$ est le cercle $|w - 1/2| = 1/2$.

Attention

Une homographie transforme une droite en cercle si et seulement si $c \neq 0$ (le point à l'infini bouge).

9 Synthèse

Concepts clés

1. **Holomorphe** $=$ **Analytique** : Régularité forte automatique.
2. **Cauchy-Riemann** : Conditions différentielles fondamentales.
3. **Identité** : Rigidité géométrique sur un domaine.
4. **Conformité** : Conservation des angles ($f' \neq 0$).
5. **Compactification** : $\hat{\mathbb{C}}$ possède un seul infini stable topologiquement.
6. **Möbius** : Conservation structurelle des cercles et droites.