Introduction à l'Analyse Complexe

Notations, Continuité et Dérivabilité

Cours basé sur la leçon vidéo

Table des matières

1 Généralités et Notations

Définition

Soit U un ensemble tel que $U \subset \mathbb{C}$. Une **fonction d'une variable complexe** est une application $f : U \to \mathbb{C}$, que l'on note $z \mapsto f(z)$.

Identification $\mathbb{C} \simeq \mathbb{R}^2$ et décomposition

On rappelle l'identification naturelle entre les nombres complexes $\mathbb{C}$ et le plan réel $\mathbb{R}^2$ via l'application ϕ définie par :

$$\phi(x + iy) = (x, y)$$

Ainsi, une fonction complexe $f(z)$ peut s'écrire de manière unique en fonction de sa partie réelle et de sa partie imaginaire. Pour $z = x + iy$, on a :

$$f(x + iy) = u(x, y) + iv(x, y)$$

où $u(x, y) = \mathrm{Re}(f(z))$ et $v(x, y) = \mathrm{Im}(f(z))$ sont deux fonctions réelles de deux variables réelles.

2 Exemple de la fonction carré

Étude de $f(z)$

Considérons la fonction $f(z) = z^2$ définie sur le disque unité fermé $U = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| \leq 1\}$.

— **En coordonnées polaires :** On pose $z = \rho e^{i\theta}$ avec $\rho \leq 1$. Alors :

$$z^2 = (\rho e^{i\theta})^2 = \rho^2 e^{2i\theta}$$

Cela implique que $|z^2| = \rho^2 \leq 1$ et $\arg(z^2) = 2\theta$.

— **En coordonnées cartésiennes :** En posant $z = x + iy$, on développe :

$$f(x + iy) = (x + iy)^2 = x^2 + 2ixy + (iy)^2 = (x^2 - y^2) + i(2xy)$$

Par identification unique des parties réelle et imaginaire, on obtient :

$$u(x, y) = x^2 - y^2 \quad \text{et} \quad v(x, y) = 2xy$$

3 Continuité

Définition

Une fonction $f : U \to \mathbb{C}$ est **continue** en $z_0 \in U$ si :

$$\forall \epsilon > 0, \exists \delta > 0 \text{ tel que } \forall z \in U, \quad |z - z_0| < \delta \implies |f(z) - f(z_0)| < \epsilon$$

Géométriquement, cela signifie que l'image d'un disque ouvert de rayon δ centré en z_0 est entièrement contenue dans un disque ouvert de rayon ϵ centré en $f(z_0)$.

Idée clé

Cette définition est équivalente à la **définition séquentielle** :

$$\lim_{z \to z_0} f(z) = f(z_0)$$

Exemple : La fonction conjuguée

La fonction $f(z) = \bar{z}$ est continue sur $\mathbb{C}$ tout entier. En effet, en posant $z = x + iy$ et $z_0 = x_0 + iy_0$, on a $u(x, y) = x$ et $v(x, y) = -y$. On peut le démontrer directement par le module :

$$|\bar{z} - \overline{z_0}| = |\overline{z - z_0}| = |z - z_0|$$

Ainsi, choisir $\delta = \epsilon$ suffit à satisfaire la définition formelle.

4 Contre-exemple de continuité

Dépendance au chemin d'approche

Étudions la continuité en $z = 0$ de la fonction :

$$f(z) = \begin{cases} \frac{\mathrm{Re}(z)}{|z|} & \text{si } z \neq 0 \\ 0 & \text{si } z = 0 \end{cases}$$

Calculons la limite lorsque $z \to 0$ selon différents chemins :

— **Sur l'axe réel ($z = x$) :** $f(x) = \frac{x}{|x|}$. La limite à droite ($x \to 0^+$) vaut 1, tandis que la limite à gauche ($x \to 0^-$) vaut -1.

— **Sur l'axe imaginaire ($z = iy$) :** $f(iy) = \frac{0}{|y|} = 0$. La limite vaut 0.

Conclusion : Comme les limites dépendent du chemin d'approche vers l'origine, la limite n'existe pas. La fonction n'est donc **pas continue** en 0.

5 Dérivabilité Complexe

Définition

Une fonction f est **dérivable** au sens complexe en z_0 si la limite suivante existe et est finie :

$$f'(z_0) = \lim_{h \to 0} \frac{f(z_0 + h) - f(z_0)}{h}$$

où $h \in \mathbb{C}$.

Lien fondamental avec $\mathbb{R}^2$

Si f est dérivable au sens complexe, alors elle est automatiquement dérivable au sens réel (en tant qu'application de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}^2$). Sa différentielle est une application linéaire qui correspond exactement à la **multiplication** par le nombre complexe $f'(z_0) = a + ib$.

Identification des matrices

La multiplication par $a+ib$ dans la base canonique de $\mathbb{C}$ est représentée par la matrice :

$$M = \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}$$

D'autre part, la matrice jacobienne de f (vue comme application réelle de (x, y) vers (u, v)) est :

$$J_f = \begin{pmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial u}{\partial y} \\ \frac{\partial v}{\partial x} & \frac{\partial v}{\partial y} \end{pmatrix}$$

Pour que f soit dérivable au sens complexe, il faut impérativement que $J_f = M$.

Conditions de Cauchy-Riemann et dérivée

L'égalité $J_f = M$ impose les **équations de Cauchy-Riemann** :

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} = a \quad \text{et} \quad \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x} = -b$$

En regroupant ces termes, on obtient l'expression de la dérivée complexe :

$$f'(z) = \frac{\partial u}{\partial x} + i\frac{\partial v}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} - i\frac{\partial u}{\partial y}$$