

Applications des Transformations Conformes

Températures Stationnaires dans un Demi-Plan

Table des matières

1	Introduction aux Températures Stationnaires	3
1.1	Flux de chaleur et loi de Fourier	3
1.2	Équation de Laplace	3
1.3	Fonctions harmoniques et conjugué harmonique	3
1.3.1	Rappel sur les fonctions holomorphes	4
1.3.2	Définition du conjugué harmonique	4
1.3.3	Démonstration de la perpendicularité des gradients	4
1.3.4	Propriétés fondamentales du conjugué harmonique	5
1.3.5	Interprétation physique	5
1.4	Propriétés de la fonction de température	5
2	La Sphère de Riemann et la Compactification du Plan Complexe	5
2.1	Le problème : le plan complexe n'est pas compact	6
2.2	Construction de la sphère de Riemann	6
2.2.1	La sphère unité dans \mathbb{R}^3	6
2.2.2	Projection stéréographique	6
2.3	Pourquoi la sphère est compacte ?	6
2.3.1	Rappel sur la compacité	6
2.3.2	Démonstration que S^2 est compacte	7
2.4	Comment la sphère compactifie \mathbb{C}	7
2.4.1	Ajout du point à l'infini	7
2.4.2	Topologie de $\hat{\mathbb{C}}$	7
2.4.3	Pourquoi c'est une compactification	7
2.5	Applications aux transformations conformes	7
2.5.1	Transformations de Möbius	7
2.5.2	Étude du comportement à l'infini	8
2.5.3	La transformation logarithme et l'infini	8
2.6	Intérêt pour les problèmes de physique mathématique	8
2.7	Résumé visuel	9
2.8	Conclusion de la section	9
3	Problème Préliminaire : Demi-Plan avec Discontinuité à l'Origine	9
3.1	Énoncé du problème simplifié	9
3.2	Choix de la transformation conforme	9
3.3	Analyse de la transformation $w = \log z$	10

3.4	Image du demi-plan supérieur	10
3.5	Conditions aux limites dans le plan w	10
3.6	Solution dans le plan transformé	10
3.7	Retour aux coordonnées originales	11
3.8	Vérification et interprétation	11
3.9	Leçon de ce problème simple	11
4	Homéomorphismes et Invariants Topologiques	12
4.1	Définition et intuition géométrique	12
4.2	Préservation des "trous" et de la connexité	12
4.3	L'astuce de la suppression d'un point	12
4.4	Lien avec les transformations conformes	13
5	Températures Stationnaires dans un Demi-Plan	13
5.1	Énoncé du problème	13
5.2	Méthode de résolution par transformation conforme	13
5.2.1	Motivation du choix de la transformation	13
5.2.2	Transformation utilisée	14
5.2.3	Interprétation géométrique de $\theta_1 - \theta_2$	15
5.2.4	Propriétés de la transformation	16
5.3	Solution dans le plan transformé	16
5.4	Retour aux coordonnées originales	16
5.5	Solution finale	17
5.6	Vérification	17
5.6.1	Isothermes	17
6	Généralisation	17
7	Conclusion	17

1 Introduction aux Températures Stationnaires

1.1 Flux de chaleur et loi de Fourier

Dans la théorie de la conduction thermique, le **flux** à travers une surface dans un corps solide en un point est la quantité de chaleur circulant dans une direction spécifiée normale à la surface par unité de temps et par unité de surface au point considéré.

Le flux est mesuré en unités telles que calories par seconde par centimètre carré. Il est noté Φ et varie avec la dérivée normale de la température T au point sur la surface selon la **loi de Fourier** :

$$\Phi = -K \frac{dT}{dN} \quad (K > 0) \quad (1)$$

où K est appelée la **conductivité thermique** du matériau du solide, supposé homogène.

1.2 Équation de Laplace

Considérons un élément de volume intérieur au solide ayant la forme d'un prisme rectangulaire de hauteur unité perpendiculaire au plan xy , avec pour base Δx par Δy dans le plan.

Le taux temporel de flux de chaleur vers la droite à travers la face gauche est $-KT_x(x, y)\Delta y$, et vers la droite à travers la face droite, c'est $-KT_x(x + \Delta x, y)\Delta y$.

En soustrayant le premier taux du second, nous obtenons le taux net de perte de chaleur de l'élément à travers ces deux faces :

$$-K \left[\frac{T_x(x + \Delta x, y) - T_x(x, y)}{\Delta x} \right] \Delta x \Delta y \quad (2)$$

Si Δx est très petit, cela devient :

$$-KT_{xx}(x, y)\Delta x \Delta y \quad (3)$$

De manière similaire, le taux résultant de perte de chaleur à travers les deux autres faces perpendiculaires au plan xy est :

$$-KT_{yy}(x, y)\Delta x \Delta y \quad (4)$$

Puisque les températures dans l'élément sont stationnaires (ne varient pas avec le temps), la somme des expressions est nulle, ce qui donne l'**équation de Laplace** :

$$T_{xx}(x, y) + T_{yy}(x, y) = 0 \quad (5)$$

1.3 Fonctions harmoniques et conjugué harmonique

Une fonction $u(x, y)$ qui satisfait l'équation de Laplace dans un domaine D est appelée **fonction harmonique** dans ce domaine. Les fonctions harmoniques jouent un rôle central en physique mathématique car elles décrivent de nombreux phénomènes stationnaires (température, potentiel électrique, écoulement de fluide, etc.).

1.3.1 Rappel sur les fonctions holomorphes

Avant de définir le conjugué harmonique, rappelons quelques propriétés fondamentales des fonctions holomorphes (analytiques).

Une fonction complexe $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$, où $z = x + iy$, est dite **holomorphe** (ou analytique) en un point z_0 si elle est dérivable en z_0 et dans un voisinage de z_0 .

Propriétés fondamentales des fonctions holomorphes :

1. **Dérivabilité infinie :** Si f est holomorphe, alors elle est dérivable une infinité de fois.
2. **Développement en série :** f peut être développée en série de Taylor autour de tout point de son domaine de définition.
3. **Conditions de Cauchy-Riemann :** Une condition nécessaire (et suffisante si les dérivées partielles sont continues) pour que $f = u + iv$ soit holomorphe est que u et v satisfassent les équations de Cauchy-Riemann :

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} \quad \text{et} \quad \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x} \quad (6)$$

4. **Harmonicité des composantes :** Si $f = u + iv$ est holomorphe, alors u et v sont toutes deux des fonctions harmoniques, c'est-à-dire qu'elles satisfont l'équation de Laplace :

$$u_{xx} + u_{yy} = 0 \quad \text{et} \quad v_{xx} + v_{yy} = 0 \quad (7)$$

1.3.2 Définition du conjugué harmonique

Soit $u(x, y)$ une fonction harmonique dans un domaine D . Une fonction $v(x, y)$ est appelée **conjugué harmonique** de u si la fonction complexe :

$$f(z) = u(x, y) + iv(x, y) \quad (8)$$

est holomorphe dans D .

1.3.3 Démonstration de la perpendicularité des gradients

Une propriété cruciale du conjugué harmonique est que les courbes de niveau de u et v sont orthogonales. Démontrons cette propriété.

Les gradients de u et v sont :

$$\nabla u = \left(\frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y} \right) \quad \text{et} \quad \nabla v = \left(\frac{\partial v}{\partial x}, \frac{\partial v}{\partial y} \right) \quad (9)$$

Calculons leur produit scalaire :

$$\nabla u \cdot \nabla v = \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \frac{\partial v}{\partial y} \quad (10)$$

En utilisant les équations de Cauchy-Riemann $\frac{\partial v}{\partial x} = -\frac{\partial u}{\partial y}$ et $\frac{\partial v}{\partial y} = \frac{\partial u}{\partial x}$, nous obtenons :

$$\nabla u \cdot \nabla v = \frac{\partial u}{\partial x} \left(-\frac{\partial u}{\partial y} \right) + \frac{\partial u}{\partial y} \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right) = -\frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial u}{\partial y} \frac{\partial u}{\partial x} = 0 \quad (11)$$

Puisque le produit scalaire est nul, les gradients ∇u et ∇v sont **perpendiculaires** en tout point.

Or, le gradient ∇u est perpendiculaire à la courbe de niveau $u = c_1$, et ∇v est perpendiculaire à la courbe de niveau $v = c_2$. Par conséquent, les courbes de niveau $u = c_1$ et $v = c_2$ se coupent à **angle droit** en tout point d'intersection.

1.3.4 Propriétés fondamentales du conjugué harmonique

1. **Harmonicité** : Si v est le conjugué harmonique de u , alors v est elle-même une fonction harmonique (comme démontré ci-dessus).
2. **Unicité** : Dans un domaine simplement connexe, le conjugué harmonique est déterminé de manière unique à une constante additive près. Si v est un conjugué harmonique de u , alors $v + C$ (où C est une constante réelle) l'est également.
3. **Orthogonalité** : Les courbes de niveau $u(x, y) = c_1$ et $v(x, y) = c_2$ forment un réseau orthogonal, comme démontré précédemment.

1.3.5 Interprétation physique

En physique, si $u(x, y)$ représente un potentiel (température, potentiel électrique, potentiel de vitesse), son conjugué harmonique $v(x, y)$ décrit les **lignes de flux** associées. Les courbes $u = c_1$ sont les équipotentielles, tandis que les courbes $v = c_2$ sont les lignes le long desquelles le flux se propage.

Cette dualité entre potentiel et flux est fondamentale dans l'étude des phénomènes stationnaires bidimensionnels et justifie l'utilisation des transformations conformes pour résoudre ces problèmes.

1.4 Propriétés de la fonction de température

La fonction de température $T(x, y)$ satisfait donc l'équation de Laplace en chaque point intérieur du solide. Ainsi, T est une **fonction harmonique** de x et y dans le domaine représentant l'intérieur du corps solide.

- **Isothermes** : Les surfaces $T(x, y) = c_1$, où c_1 est une constante réelle quelconque, sont les *isothermes* dans le solide. Elles peuvent être considérées comme des courbes dans le plan xy .
- **Gradient** : Le gradient de T est perpendiculaire à une isotherme en chaque point, et le flux maximal en un tel point est dans la direction du gradient.
- **Lignes de flux** : Si $S(x, y)$ est un conjugué harmonique de la fonction T , alors une courbe $S(x, y) = c_2$ a pour vecteur tangent le gradient de T en chaque point. Ces courbes sont appelées *lignes de flux*. La chaleur circule perpendiculairement aux isothermes, le long des courbes $S = c_2$.

2 La Sphère de Riemann et la Compactification du Plan Complexe

Avant d'aborder le problème principal, il est essentiel de comprendre le cadre géométrique dans lequel s'inscrivent les transformations conformes. En particulier, nous avons vu que la transformation $w = \log z$ envoie l'origine vers l'infini, et que la transformation

de Möbius $\zeta = \frac{z-1}{z+1}$ envoie $z = -1$ vers l'infini. Pour traiter rigoureusement ces notions, nous introduisons la **sphère de Riemann**.

2.1 Le problème : le plan complexe n'est pas compact

Dans le plan complexe \mathbb{C} , les suites peuvent « partir à l'infini » sans converger. Par exemple, la suite $z_n = n$ n'a pas de limite dans \mathbb{C} .

En analyse complexe, cela crée plusieurs difficultés :

- Les fonctions méromorphes (comme $1/z$) ont des pôles « à l'infini »
- On ne peut pas traiter l'infini comme un point ordinaire
- Certaines transformations (comme $z \mapsto 1/z$) échangent 0 et l'infini

Solution : Ajouter un point à l'infini pour « fermer » le plan complexe.

2.2 Construction de la sphère de Riemann

2.2.1 La sphère unité dans \mathbb{R}^3

Considérons la sphère unité centrée à l'origine :

$$S^2 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 = 1\} \quad (12)$$

Le **pôle Nord** est le point $N = (0, 0, 1)$.

2.2.2 Projection stéréographique

La **projection stéréographique** $\pi : S^2 \setminus \{N\} \rightarrow \mathbb{C}$ est définie ainsi :

Pour tout point $P = (x, y, z)$ sur la sphère (sauf le pôle Nord), on trace la droite passant par N et P . Cette droite coupe le plan complexe (identifié au plan $z = 0$) en un point unique $\pi(P)$.

Formules explicites :

Si $P = (x, y, z) \in S^2$ avec $z \neq 1$, alors :

$$\pi(x, y, z) = \frac{x}{1-z} + i \frac{y}{1-z} \quad (13)$$

La réciproque $\pi^{-1} : \mathbb{C} \rightarrow S^2 \setminus \{N\}$ est donnée par :

$$\pi^{-1}(\zeta) = \left(\frac{2 \operatorname{Re}(\zeta)}{|\zeta|^2 + 1}, \frac{2 \operatorname{Im}(\zeta)}{|\zeta|^2 + 1}, \frac{|\zeta|^2 - 1}{|\zeta|^2 + 1} \right) \quad (14)$$

2.3 Pourquoi la sphère est compacte ?

2.3.1 Rappel sur la compacité

Un espace topologique est **compact** si de tout recouvrement ouvert, on peut extraire un sous-recouvrement fini.

En pratique, dans \mathbb{R}^n , un ensemble est compact **si et seulement si** il est :

- **Fermé** (contient toutes ses limites)
- **Borné** (contenu dans une boule de rayon fini)

2.3.2 Démonstration que S^2 est compacte

1. **Fermée** : S^2 est l'image réciproque du fermé $\{1\}$ par la fonction continue $f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2$. Donc S^2 est fermée.
2. **Bornée** : Tous les points de S^2 sont à distance 1 de l'origine. Donc $S^2 \subset B(0, 2)$ (boule de rayon 2).

Conclusion : S^2 est compacte.

2.4 Comment la sphère compactifie \mathbb{C}

2.4.1 Ajout du point à l'infini

La projection stéréographique établit une bijection entre :

- $S^2 \setminus \{N\}$ (sphère privée du pôle Nord)
- \mathbb{C} (plan complexe)

L'idée fondamentale : On identifie le pôle Nord N au **point à l'infini** noté ∞ .

On définit la **sphère de Riemann** (ou plan complexe étendu) :

$$\hat{\mathbb{C}} = \mathbb{C} \cup \{\infty\} \quad (15)$$

2.4.2 Topologie de $\hat{\mathbb{C}}$

Un voisinage de ∞ est défini comme le complémentaire d'un compact de \mathbb{C} . Autrement dit :

$$V \text{ est voisinage de } \infty \iff \exists R > 0, \{z \in \mathbb{C} : |z| > R\} \subset V \quad (16)$$

Comportement de la projection :

- Quand P s'approche du pôle Nord sur la sphère, $|\pi(P)| \rightarrow \infty$ dans \mathbb{C}
- Réciproquement, quand $|z| \rightarrow \infty$ dans \mathbb{C} , $\pi^{-1}(z)$ s'approche du pôle Nord

2.4.3 Pourquoi c'est une compactification

1. $\hat{\mathbb{C}}$ est homéomorphe à S^2 via la projection stéréographique prolongée par $\pi(N) = \infty$
2. S^2 est compacte (démontré ci-dessus)
3. \mathbb{C} est dense dans $\hat{\mathbb{C}}$: tout voisinage de ∞ contient des points de \mathbb{C}

Conclusion : $\hat{\mathbb{C}}$ est un espace compact qui contient \mathbb{C} comme sous-espace dense. C'est une **compactification** de \mathbb{C} .

2.5 Applications aux transformations conformes

La sphère de Riemann fournit le cadre naturel pour étudier les transformations utilisées dans ce chapitre.

2.5.1 Transformations de Möbius

Les transformations de Möbius (ou homographies) sont de la forme :

$$f(z) = \frac{az + b}{cz + d}, \quad ad - bc \neq 0 \quad (17)$$

Dans \mathbb{C} , ces transformations ne sont pas définies partout (problème si $cz + d = 0$). Mais sur $\hat{\mathbb{C}}$, elles deviennent des **bijections** de $\hat{\mathbb{C}}$ sur lui-même et forment un groupe (le groupe projectif $\text{PGL}(2, \mathbb{C})$).

Exemple : $f(z) = \frac{1}{z}$

— Dans \mathbb{C} : non définie en 0

— Dans $\hat{\mathbb{C}}$: $f(0) = \infty$ et $f(\infty) = 0$ (bijection parfaite)

C'est exactement ce type de transformation que nous avons utilisée avec $\zeta = \frac{z-1}{z+1}$, qui envoie $z = -1$ vers ∞ et $z = \infty$ vers 1.

2.5.2 Étude du comportement à l'infini

Pour étudier une fonction $f(z)$ quand $z \rightarrow \infty$, on utilise le changement de variable $\zeta = 1/z$:

— $z \rightarrow \infty$ correspond à $\zeta \rightarrow 0$

— On ramène l'étude à l'infini à une étude au voisinage de 0

Exemple : $f(z) = \frac{1}{z^2+1}$

— Au voisinage de l'infini : $f(z) \sim \frac{1}{z^2} \rightarrow 0$

— Sur la sphère de Riemann : $f(\infty) = 0$

2.5.3 La transformation logarithme et l'infini

Dans le problème préliminaire, nous avons utilisé $w = \log z$. Quand $z \rightarrow 0$:

$$u = \ln |z| \rightarrow -\infty \quad (18)$$

Sur la sphère de Riemann, le point $z = 0$ est un point ordinaire, mais son image par le logarithme « part vers l'infini » dans le plan w . Cela explique pourquoi la discontinuité à l'origine est « envoyée à l'infini » : dans la bande transformée, les deux demi-axes (positif et négatif) s'étendent jusqu'à $u = -\infty$, ce qui correspond au pôle Nord de la sphère de Riemann dans le plan w .

2.6 Intérêt pour les problèmes de physique mathématique

La compactification de \mathbb{C} est particulièrement utile pour les problèmes de températures stationnaires car :

1. **Unification du traitement des pôles** : Les singularités des transformations (comme $z = \pm 1$ dans notre problème principal) peuvent être traitées comme des points ordinaires sur la sphère.
2. **Étude du comportement à l'infini** : Dans le problème du demi-plan, nous stipulons que $T(x, y) \rightarrow 0$ quand $y \rightarrow \infty$. Sur la sphère de Riemann, $y \rightarrow \infty$ correspond à s'approcher du pôle Nord, ce qui donne un sens précis à cette condition.
3. **Transformations conformes globales** : Les transformations de Möbius, qui sont au cœur de notre méthode, sont des bijections conformes de $\hat{\mathbb{C}}$ sur elle-même. Elles préservent les angles même aux points envoyés à l'infini.

2.7 Résumé visuel

Plan \mathbb{C}		Sphère S^2
Point fini z	\longleftrightarrow	Point $P \neq N$
$z \rightarrow \infty$	\longleftrightarrow	$P \rightarrow N$ (pôle Nord)
Droites	\longleftrightarrow	Cercles passant par N
Cercles	\longleftrightarrow	Cercles ne passant pas par N

Propriété clé : La projection stéréographique est **conforme** (elle préserve les angles). C'est pourquoi elle est si naturelle dans l'étude des transformations conformes.

2.8 Conclusion de la section

La sphère de Riemann $\hat{\mathbb{C}}$ est le **cadre naturel** pour l'analyse complexe et les transformations conformes car elle :

- **Compactifie** \mathbb{C} en ajoutant un seul point à l'infini
- **Unifie** le traitement des pôles et des valeurs finies
- **Permet** d'étendre les transformations de Möbius en bijections globales
- **Facilite** l'étude du comportement à l'infini
- **Fournit** un modèle géométrique élégant pour les fonctions complexes

Dans les sections suivantes, nous utiliserons implicitement ce cadre lorsque nous parlerons de « points à l'infini » ou de « comportement quand $|z| \rightarrow \infty$ ». *La sphère de Riemann garantit que ces notions sont bien définies.*

3 Problème Préliminaire : Demi-Plan avec Discontinuité à l'Origine

Avant de résoudre le problème complet, étudions un cas plus simple qui illustre la méthode.

3.1 Énoncé du problème simplifié

Considérons une plaque mince semi-infinie $y \geq 0$ dont les faces sont isolées et dont le bord $y = 0$ est maintenu à :

- Température $T = 0$ pour $x < 0$
- Température $T = 100$ pour $x > 0$

Nous cherchons la température stationnaire $T(x, y)$ dans le demi-plan supérieur.

Mathématiquement, le problème s'écrit :

$$T_{xx}(x, y) + T_{yy}(x, y) = 0 \quad (y > 0) \quad (19)$$

$$T(x, 0) = \begin{cases} 100 & \text{quand } x > 0 \\ 0 & \text{quand } x < 0 \end{cases} \quad (20)$$

3.2 Choix de la transformation conforme

La discontinuité de température se produit à l'origine $z = 0$. Nous cherchons une transformation qui va :

- Envoyer l'origine vers l'infini

- Transformer le demi-plan en une région où les conditions aux limites sont sur des bords parallèles

La transformation naturelle est le **logarithme complexe** :

$$w = \log z \quad (21)$$

3.3 Analyse de la transformation $w = \log z$

Écrivons z en coordonnées polaires :

$$z = r \exp(i\theta) = r(\cos \theta + i \sin \theta) \quad (22)$$

où $r = |z| = \sqrt{x^2 + y^2}$ et $\theta = \arg(z)$.

La transformation logarithme donne :

$$w = \log z = \ln r + i\theta \quad (23)$$

Donc $w = u + iv$ avec :

$$u = \ln r = \ln \sqrt{x^2 + y^2} \quad \text{et} \quad v = \theta = \arg(z) \quad (24)$$

3.4 Image du demi-plan supérieur

Pour z dans le demi-plan supérieur ($y > 0$) :

- r varie de 0 à ∞ , donc $u = \ln r$ varie de $-\infty$ à $+\infty$
- θ varie de 0 à π (car $y > 0$)

Ainsi, le demi-plan supérieur $y > 0$ est transformé en la **bande horizontale** :

$$-\infty < u < \infty, \quad 0 < v < \pi \quad (25)$$

3.5 Conditions aux limites dans le plan w

Examinons ce qui se passe sur l'axe réel ($y = 0$) :

- **Pour** $x > 0$: $z = x$ est réel positif, donc $\theta = 0$. Ainsi $v = 0$.

$$T = 100 \quad \text{sur} \quad v = 0 \quad (26)$$

- **Pour** $x < 0$: $z = x$ est réel négatif, donc $\theta = \pi$. Ainsi $v = \pi$.

$$T = 0 \quad \text{sur} \quad v = \pi \quad (27)$$

3.6 Solution dans le plan transformé

Dans la bande $0 < v < \pi$, nous cherchons une fonction harmonique $T(u, v)$ telle que :

- $T = 100$ sur $v = 0$
- $T = 0$ sur $v = \pi$

La solution évidente est une **fonction linéaire** en v :

$$T(u, v) = 100 - \frac{100}{\pi}v = 100 \left(1 - \frac{v}{\pi}\right) \quad (28)$$

Vérifions :

- Quand $v = 0$: $T = 100(1 - 0) = 100$
- Quand $v = \pi$: $T = 100(1 - 1) = 0$
- T est harmonique car c'est une fonction linéaire (ses dérivées secondes sont nulles)

3.7 Retour aux coordonnées originales

Puisque $v = \theta = \arg(z)$, nous avons :

$$T(x, y) = 100 \left(1 - \frac{\arg(z)}{\pi} \right) \quad (29)$$

Pour exprimer $\arg(z)$ en fonction de x et y , utilisons la fonction arctangente. Pour $z = x + iy$ dans le demi-plan supérieur ($y > 0$) :

$$\arg(z) = \begin{cases} \arctan\left(\frac{y}{x}\right) & \text{si } x > 0 \\ \frac{\pi}{2} & \text{si } x = 0 \\ \pi + \arctan\left(\frac{y}{x}\right) & \text{si } x < 0 \end{cases} \quad (30)$$

La solution finale s'écrit donc :

$$T(x, y) = 100 \left(1 - \frac{1}{\pi} \arg(x + iy) \right) \quad (0 \leq \arg(z) \leq \pi) \quad (31)$$

Ou de manière plus explicite :

$$T(x, y) = \begin{cases} 100 \left(1 - \frac{1}{\pi} \arctan\left(\frac{y}{x}\right) \right) & \text{si } x > 0 \\ 50 & \text{si } x = 0, y > 0 \\ 100 \left(-\frac{1}{\pi} \arctan\left(\frac{y}{x}\right) \right) & \text{si } x < 0 \end{cases} \quad (32)$$

3.8 Vérification et interprétation

Vérification des conditions aux limites :

- Pour $y \rightarrow 0^+$ avec $x > 0$: $\arg(z) \rightarrow 0$, donc $T \rightarrow 100$
- Pour $y \rightarrow 0^+$ avec $x < 0$: $\arg(z) \rightarrow \pi$, donc $T \rightarrow 0$
- Pour $y \rightarrow \infty$: $\arg(z) \rightarrow \frac{\pi}{2}$, donc $T \rightarrow 50$ (température moyenne)

Isothermes : Les courbes $T = c$ (constante) correspondent à $\arg(z) = \pi(1 - c/100) =$ constante. Ce sont des **demi-droites** partant de l'origine, faisant un angle constant avec l'axe réel positif.

Lignes de flux : Le conjugué harmonique de T est proportionnel à $u = \ln r = \ln \sqrt{x^2 + y^2}$. Les lignes de flux sont donc des **cercles concentriques** centrés à l'origine, orthogonaux aux isothermes (demi-droites).

3.9 Leçon de ce problème simple

Ce problème illustre parfaitement la puissance des transformations conformes :

- Un problème avec une discontinuité sur l'axe réel devient trivial dans le plan transformé
- La transformation $w = \log z$ convertit le demi-plan en une bande
- Les conditions aux limites constantes sur des demi-droites deviennent des conditions sur des lignes parallèles
- La solution dans la bande est une simple fonction linéaire

Cette méthode s'applique directement au problème plus complexe du segment $[-1, 1]$, où nous utiliserons une transformation similaire mais adaptée à la géométrie.

4 Homéomorphismes et Invariants Topologiques

Pour comprendre pourquoi les transformations conformes sont si efficaces pour résoudre des problèmes aux limites, il est crucial de saisir la notion d'**homéomorphisme**. C'est elle qui garantit que l'on ne "déchire" pas le domaine lors du changement de variable.

4.1 Définition et intuition géométrique

Une application $f : E \rightarrow F$ entre deux espaces topologiques est un **homéomorphisme** si elle vérifie trois conditions :

1. Elle est **bijective** (chaque point de F a un unique antécédent dans E).
2. Elle est **continue** (elle préserve la proximité des points).
3. Sa réciproque f^{-1} est **également continue**.

Intuitivement, deux espaces sont homéomorphes s'ils peuvent être déformés l'un en l'autre de manière continue, **sans déchirer ni recoller** (comme si on modelait de la pâte à modeler). Les rotations, translations et homothéties sont des homéomorphismes, mais on peut aussi étirer, tordre ou aplatir un objet tant qu'on ne le casse pas.

4.2 Préservation des "trous" et de la connexité

La propriété fondamentale des homéomorphismes est qu'ils préservent les **invariants topologiques**, c'est-à-dire les propriétés qui ne dépendent pas de la géométrie exacte (distances, angles) mais de la structure globale de l'espace.

- **Le nombre de trous** : Un ensemble possédant un "trou" (comme un anneau ou une couronne) aura pour image un ensemble possédant également un trou. On ne peut pas transformer continûment un disque plein en un anneau sans le déchirer.
- **La connexité** : Le nombre de "morceaux" (composantes connexes) d'un espace est préservé. Si un espace est d'un seul tenant, son image par homéomorphisme sera aussi d'un seul tenant.

4.3 L'astuce de la suppression d'un point

Un outil puissant pour prouver que deux espaces ne sont *pas* homéomorphes consiste à supprimer un point. Si E et F sont homéomorphes via f , alors l'espace $E \setminus \{x\}$ (privé du point x) est homéomorphe à $F \setminus \{f(x)\}$.

Prenons un exemple classique : la droite \mathbb{R} et le plan \mathbb{R}^2 .

- Si l'on retire un point à une droite, on obtient **deux** morceaux disjoints (la droite est coupée en deux).
- Si l'on retire un point à un plan, on obtient toujours **un seul** morceau connexe (on peut toujours contourner le trou).

Puisque le nombre de morceaux après suppression d'un point diffère, la droite et le plan ne sont pas homéomorphes. De la même manière, un segment (qui se coupe en deux si on enlève un point intérieur) n'est pas homéomorphe à un cercle (qui reste en un seul morceau si on enlève un point).

4.4 Lien avec les transformations conformes

Les transformations conformes utilisées dans ce chapitre (comme $w = \log z$ ou les transformations de Möbius sur la sphère de Riemann) sont des **homéomorphismes** (localement ou globalement).

C'est précisément cette propriété qui garantit que la topologie du domaine est parfaitement respectée lors du changement de variable :

- Les bords de la région restent des bords.
- L'intérieur du domaine reste un intérieur.
- La structure de connexité (le fait que le domaine soit d'un seul tenant, sans trous) n'est jamais altérée.

En résumé, la transformation conforme "étire" et "plie" le domaine pour le rendre plus simple à résoudre, mais elle ne le déchire jamais. C'est ce qui permet de transférer rigoureusement les conditions aux limites du plan z vers le plan w .

5 Températures Stationnaires dans un Demi-Plan

5.1 Énoncé du problème

Trouvons une expression pour les températures stationnaires $T(x, y)$ dans une plaque mince semi-infinie $y \geq 0$ dont les faces sont isolées et dont le bord $y = 0$ est maintenu à température zéro sauf sur le segment $-1 < x < 1$, où elle est maintenue à température unité.

La fonction $T(x, y)$ doit être bornée. Mathématiquement, le problème aux limites peut s'écrire :

$$T_{xx}(x, y) + T_{yy}(x, y) = 0 \quad (-\infty < x < \infty, y > 0) \quad (33)$$

$$T(x, 0) = \begin{cases} 1 & \text{quand } |x| < 1 \\ 0 & \text{quand } |x| > 1 \end{cases} \quad (34)$$

avec $|T(x, y)| < M$ où M est une constante positive.

5.2 Méthode de résolution par transformation conforme

Notre méthode consiste à obtenir un nouveau problème de Dirichlet pour une région dans le plan uv . Cette région sera l'image du demi-plan sous une transformation $w = f(z)$ qui est analytique dans le domaine $y > 0$ et conforme le long de la frontière $y = 0$ sauf aux points $(\pm 1, 0)$.

5.2.1 Motivation du choix de la transformation

Le choix de la transformation $w = \log \frac{z-1}{z+1}$ n'est pas arbitraire. Il est motivé par la géométrie du problème et l'objectif de simplifier les conditions aux limites.

Analyse du problème initial : Notre problème présente une géométrie compliquée :

- Demi-plan supérieur $y \geq 0$
- Trois segments sur l'axe réel avec des températures différentes :
 - $(-\infty, -1) : T = 0$
 - $(-1, 1) : T = 1$

— $(1, \infty) : T = 0$

Les points critiques sont $z = -1$ et $z = 1$ où la température change brusquement.

Stratégie de résolution : On cherche une transformation qui va :

1. Envoyer les points singuliers ($z = \pm 1$) vers l'infini
2. Transformer le demi-plan en une région plus simple
3. Séparer les différentes conditions aux limites sur des bords distincts

Décomposition de la transformation :

Étape 1 : Transformation de Möbius $\zeta = \frac{z-1}{z+1}$

Cette transformation rationnelle a des propriétés remarquables :

Point z	Image ζ
$z = 1$	$\zeta = 0$
$z = -1$	$\zeta = \infty$
$z = \infty$	$\zeta = 1$
$z = 0$	$\zeta = -1$

Sur l'axe réel :

- Le segment $(-1, 1)$ est envoyé sur l'axe réel **négatif** ($\zeta < 0$)
- Les segments $(-\infty, -1)$ et $(1, \infty)$ sont envoyés sur l'axe réel **positif** ($\zeta > 0$)

Étape 2 : Le logarithme $w = \log \zeta$

Le logarithme complexe transforme :

- L'axe réel positif \rightarrow ligne $\text{Im}(w) = 0$
- L'axe réel négatif \rightarrow ligne $\text{Im}(w) = \pi$
- Le demi-plan supérieur \rightarrow bande horizontale $0 < \text{Im}(w) < \pi$

Résultat final : La transformation composée $w = \log \frac{z-1}{z+1}$ réalise ceci dans le plan $w = u + iv$:

- Le segment $(-1, 1)$ (où $T = 1$) \rightarrow bord supérieur $v = \pi$
- Le reste de l'axe réel (où $T = 0$) \rightarrow bord inférieur $v = 0$
- Le demi-plan \rightarrow bande infinie $0 < v < \pi$

Pourquoi c'est puissant : Dans la bande, le problème devient trivial :

- On cherche $T(u, v)$ harmonique
- $T = 0$ sur $v = 0$
- $T = 1$ sur $v = \pi$
- Solution évidente : $T = \frac{v}{\pi}$ (fonction linéaire)

Sans cette transformation, résoudre directement dans le demi-plan serait très difficile.

La transformation conforme **préserve l'harmonicité** tout en simplifiant radicalement la géométrie.

5.2.2 Transformation utilisée

Écrivons :

$$z - 1 = r_1 \exp(i\theta_1) \quad \text{et} \quad z + 1 = r_2 \exp(i\theta_2) \quad (35)$$

où $0 \leq \theta_k \leq \pi$ pour $k = 1, 2$.

La transformation est :

$$w = \log \frac{z-1}{z+1} = \ln \frac{r_1}{r_2} + i(\theta_1 - \theta_2) \quad (36)$$

Cette transformation est définie sur le demi-plan supérieur $y \geq 0$, sauf pour les deux points $z = \pm 1$, puisque $0 \leq \theta_1 - \theta_2 \leq \pi$ quand $y \geq 0$.

5.2.3 Interprétation géométrique de $\theta_1 - \theta_2$

Pour comprendre pourquoi $0 \leq \theta_1 - \theta_2 \leq \pi$ lorsque $y \geq 0$, il faut regarder la signification géométrique de ces angles dans le plan complexe.

Définition géométrique des angles :

Rappelons que $z = x + iy$.

- θ_1 est l'argument de $z-1$. Géométriquement, c'est l'angle que fait le vecteur partant du point $(1, 0)$ vers le point (x, y) avec l'axe réel positif.
- θ_2 est l'argument de $z+1$. Géométriquement, c'est l'angle que fait le vecteur partant du point $(-1, 0)$ vers le point (x, y) avec l'axe réel positif.

Puisque nous sommes dans le demi-plan supérieur ($y \geq 0$), ces deux vecteurs pointent vers le "haut". C'est pour cela que $0 \leq \theta_1 \leq \pi$ et $0 \leq \theta_2 \leq \pi$.

Interprétation de la différence $\theta_1 - \theta_2$:

La quantité $\theta_1 - \theta_2$ représente **l'angle sous lequel le segment $[-1, 1]$ est vu depuis le point z .**

Imaginons un triangle formé par les points $A(1, 0)$, $B(-1, 0)$ et $P(x, y)$.

- L'angle intérieur en B est θ_2 .
- L'angle intérieur en A est $\pi - \theta_1$ (car θ_1 est mesuré depuis l'axe positif vers la droite, donc l'angle intérieur du triangle est le supplément).
- L'angle au sommet P (appelons-le α) complète la somme des angles du triangle à π :

$$\theta_2 + (\pi - \theta_1) + \alpha = \pi \quad (37)$$

$$\alpha = \theta_1 - \theta_2 \quad (38)$$

Donc, $\theta_1 - \theta_2$ est exactement l'angle $\angle BPA$.

Pourquoi cet angle est-il entre 0 et π ?

Puisque $P(x, y)$ est dans le demi-plan supérieur ($y \geq 0$) :

1. La borne inférieure (0) :

- Si P est très loin ($y \rightarrow \infty$), les vecteurs PA et PB deviennent presque parallèles et verticaux. L'angle entre eux tend vers 0.
- Si P est sur l'axe réel mais en dehors du segment $[-1, 1]$ (par exemple $x > 1$), les deux vecteurs pointent dans la même direction (vers la droite). $\theta_1 = 0$ et $\theta_2 = 0$, donc la différence est 0.

2. La borne supérieure (π) :

- Si P s'approche du segment $[-1, 1]$ (c'est-à-dire $y \rightarrow 0$ avec $-1 < x < 1$), le point P est "coincé" entre A et B .
- Le vecteur PB pointe vers la droite ($\theta_2 \rightarrow 0$).
- Le vecteur PA pointe vers la gauche ($\theta_1 \rightarrow \pi$).
- La différence $\theta_1 - \theta_2$ tend donc vers $\pi - 0 = \pi$.

3. Pourquoi pas plus grand que π ?

- Comme P, A, B forment un triangle (ou sont alignés), l'angle α ne peut pas dépasser 180° (π radians).
- De plus, comme P est au-dessus de l'axe AB , l'angle est toujours positif (ou nul). On ne peut pas avoir un angle "négatif" car θ_1 (angle depuis le point de droite) est toujours plus grand ou égal à θ_2 (angle depuis le point de gauche) dans le demi-plan supérieur.

Résumé visuel :

- **Sur l'axe réel ($y = 0$) :**

- $x > 1 \implies \theta_1 - \theta_2 = 0$
- $-1 < x < 1 \implies \theta_1 - \theta_2 = \pi$
- $x < -1 \implies \theta_1 - \theta_2 = 0$
- **Dans le demi-plan ($y > 0$) :**
 - L'angle varie continûment entre 0 et π .

C'est précisément pour cette raison que la partie imaginaire de w , qui est $v = \theta_1 - \theta_2$, est contrainte dans l'intervalle $[0, \pi]$. La transformation mappe donc le demi-plan sur la **bande horizontale** $0 \leq v \leq \pi$.

5.2.4 Propriétés de la transformation

La valeur du logarithme est la valeur principale quand $0 \leq \theta_1 - \theta_2 \leq \pi$. Le demi-plan supérieur $y > 0$ est alors appliqué sur la bande horizontale $0 < v < \pi$ dans le plan w .

- Le segment de l'axe x entre $z = -1$ et $z = 1$, où $\theta_1 - \theta_2 = \pi$, est appliqué sur le bord supérieur de la bande.
- Le reste de l'axe x , où $\theta_1 - \theta_2 = 0$, est appliqué sur le bord inférieur.

5.3 Solution dans le plan transformé

Une fonction harmonique bornée de u et v qui est nulle sur le bord $v = 0$ de la bande et unité sur le bord $v = \pi$ est clairement :

$$T = \frac{1}{\pi}v \quad (39)$$

Elle est harmonique car c'est la composante imaginaire de la fonction entière $(1/\pi)w$.

5.4 Retour aux coordonnées originales

En changeant vers les coordonnées x et y au moyen de l'équation :

$$w = \ln \left| \frac{z-1}{z+1} \right| + i \arg \left(\frac{z-1}{z+1} \right) \quad (40)$$

nous trouvons que :

$$v = \arg \left[\frac{(z-1)(\bar{z}+1)}{(z+1)(\bar{z}-1)} \right] = \arg \left[\frac{x^2 + y^2 - 1 + i2y}{(x+1)^2 + y^2} \right] \quad (41)$$

ou

$$v = \arctan \left(\frac{2y}{x^2 + y^2 - 1} \right) \quad (42)$$

La portée de la fonction arctangente ici est de 0 à π puisque :

$$\arg \left(\frac{z-1}{z+1} \right) = \theta_1 - \theta_2 \quad (43)$$

et $0 \leq \theta_1 - \theta_2 \leq \pi$.

5.5 Solution finale

L'expression de la température prend donc la forme :

$$T = \frac{1}{\pi} \arctan \left(\frac{2y}{x^2 + y^2 - 1} \right) \quad (0 \leq \arctan t \leq \pi) \quad (44)$$

Puisque la fonction est harmonique dans la bande $0 < v < \pi$ et que la transformation est analytique dans le demi-plan $y > 0$, nous pouvons appliquer le théorème de conservation de l'harmonicité pour conclure que la fonction est harmonique dans ce demi-plan.

5.6 Vérification

La fonction bornée obtenue est donc la solution désirée du problème original. On peut vérifier directement que la fonction satisfait l'équation de Laplace et a les valeurs tendant vers celles indiquées sur l'axe des x lorsque le point (x, y) s'approche de l'axe des x par le haut.

5.6.1 Isothermes

Les isothermes $T(x, y) = c_1$ ($0 < c_1 < 1$) sont des arcs de cercles :

$$x^2 + (y - \cot(\pi c_1))^2 = \csc^2(\pi c_1) \quad (45)$$

passant par les points $(\pm 1, 0)$ et avec des centres sur l'axe y .

6 Généralisation

Finalement, nous notons que puisque le produit d'une fonction harmonique par une constante est également harmonique, la fonction :

$$T = \frac{T_0}{\pi} \arctan \left(\frac{2y}{x^2 + y^2 - 1} \right) \quad (0 \leq \arctan t \leq \pi) \quad (46)$$

représente les températures stationnaires dans le demi-plan donné lorsque la température $T = 1$ le long du segment $-1 < x < 1$ de l'axe des x est remplacée par n'importe quelle température constante $T = T_0$.

7 Conclusion

Les transformations conformes fournissent une méthode puissante pour résoudre des problèmes de physique mathématique impliquant l'équation de Laplace. En transformant un problème complexe dans le plan xy en un problème plus simple dans le plan uv , nous pouvons trouver des solutions qui seraient difficiles à obtenir directement.

Le problème des températures stationnaires dans un demi-plan illustre parfaitement cette technique :

- La transformation conforme préserve l'harmonicité
- Les conditions aux limites sont préservées sur les parties correspondantes
- La solution dans le plan transformé est souvent plus simple à trouver
- Le retour au plan original donne la solution recherchée