

Formalisation Mathématique de la Limite Physique de l'Économie

Analyse de la thèse de J.-M. Jancovici et confrontation aux réalités énergétiques contemporaines

Idée clé

Le débat public autour de la croissance économique oppose souvent une vision managériale (le PIB comme grandeur abstraite pouvant croître indéfiniment) à une vision biophysique de l'économie. Cette dernière, popularisée en France par Jean-Marc Jancovici, affirme que l'activité économique dépend de transformations physiques de la matière, elles-mêmes régies par des flux énergétiques.

L'objet de cette note est de formaliser mathématiquement cette contrainte à l'aide des théorèmes d'analyse de base, puis d'interroger la plasticité de cette limite au regard des évolutions technologiques et géologiques récentes.

Table des matières

1	Précision sur le modèle utilisé : de la théorie à la simplification pédagogique	2
2	Modélisation Mathématique de la Pensée de Jancovici	2
2.1	Approche par la borne supérieure (Ressources globales)	2
2.2	Approche par l'intégrale (Ressources non renouvelables)	3
3	Questionnement de la Limite M face aux Découvertes Récentes	4
3.1	Pétroles non conventionnels : Le déplacement de l'asymptote	4
3.2	La Fusion Nucléaire : Vers une borne M quasi-infinie ?	5
3.3	L'Hydrogène Blanc (Natif)	5
4	Conclusion	6
5	Références et lectures complémentaires	6

1 Précision sur le modèle utilisé : de la théorie à la simplification pédagogique

Avant d'entrer dans la formalisation, il est crucial de préciser le statut de la relation centrale mobilisée ici :

$$\frac{dY}{dt} \propto \frac{df}{dt}$$

qui postule que la variation du PIB (Y) est proportionnelle à la variation du flux d'énergie consommé (f).

Contexte biophysique

Cette formulation est une **simplification pédagogique** de la relation plus complète établie par la *physical economics*, et notamment par les travaux pionniers de **Robert U. Ayres & Benjamin Warr**. Ces auteurs démontrent que la croissance économique s'explique par une fonction de production élargie intégrant la thermodynamique :

$$Y(t) = f(\text{Exergie utile, Efficacité de conversion, Capital, Travail})$$

où l'*exergie* (part de l'énergie capable de produire un travail mécanique ou chimique utile) et les gains d'efficacité jouent un rôle central.

Notre modèle minimaliste $\frac{dY}{dt} \propto \frac{df}{dt}$ conserve l'essentiel de la contrainte biophysique : **toutes choses égales par ailleurs, sans augmentation du flux énergétique net, la croissance du PIB ne peut être maintenue.**

Source fondamentale

Ayres, R. U. & Warr, B. (2003). *Exergy, power and work in the US economy, 1900–1998*. *Energy*, 28(3), 219-273.

[https://doi.org/10.1016/S0360-5442\(02\)00089-7](https://doi.org/10.1016/S0360-5442(02)00089-7)

2 Modélisation Mathématique de la Pensée de Janco-vici

Soit $f(t)$ une fonction modélisant le flux d'énergie annuel consommé par l'humanité au cours du temps t . Selon les modèles de la physique économique, le Produit Intérieur Brut (PIB) mondial, noté $Y(t)$, est une fonction strictement croissante du flux d'énergie, de telle sorte que $\frac{dY}{dt} \propto \frac{df}{dt}$.

2.1 Approche par la borne supérieure (Ressources globales)

L'argument central repose sur la finitude du système Terre. L'énergie disponible à un instant donné provient soit de stocks fossiles (finis), soit de flux renouvelables (bornés par la constante solaire et la surface terrestre).

Définition

Il existe une constante réelle $M \in \mathbb{R}^+$ telle que, pour tout instant $t \geq 0$:

$$f(t) \leq M \quad (1)$$

Si l'on postule l'hypothèse d'une volonté politique ou structurelle de croissance perpétuelle, le flux d'énergie doit être une fonction croissante du temps.

Formule

Soit $f : [0, +\infty[\rightarrow \mathbb{R}$ une fonction monotone croissante et majorée par M . Alors f admet une limite finie L lorsque t tend vers l'infini, et :

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} f(t) = L \leq M \quad (2)$$

Démonstration

Soit $E = \{f(t) \mid t \in [0, +\infty[\}$. Par hypothèse, E est une partie non vide de \mathbb{R} majorée par M . D'après l'axiome de la borne supérieure, E admet une borne supérieure $L = \sup(E) \leq M$.

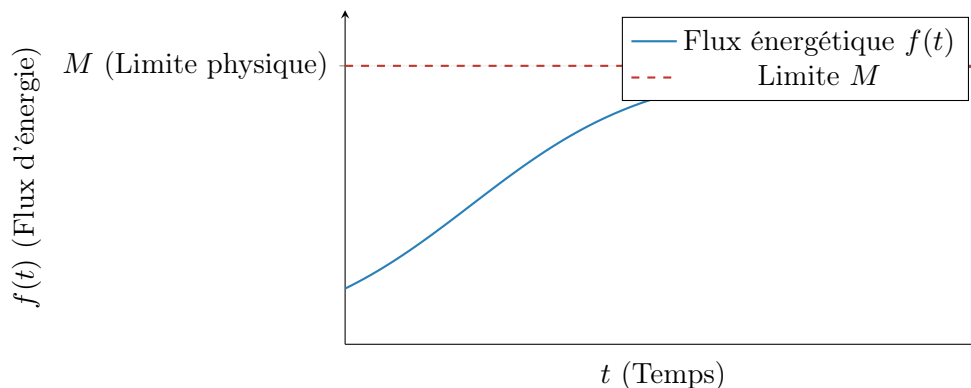
Par définition de la borne supérieure, pour tout $\epsilon > 0$, il existe un instant t_0 tel que $L - \epsilon < f(t_0) \leq L$.

La fonction f étant croissante, pour tout $t \geq t_0$, on a $f(t_0) \leq f(t)$. De plus, $f(t) \leq L$ par définition du majorant. Donc :

$$\forall t \geq t_0, \quad L - \epsilon < f(t) \leq L < L + \epsilon \implies |f(t) - L| < \epsilon \quad (3)$$

Ce qui démontre que $\lim_{t \rightarrow +\infty} f(t) = L$.

Par conséquent, si la croissance économique requiert une croissance énergétique, celle-ci ne peut pas être infinie et doit stagner au niveau de son asymptote L .



2.2 Approche par l'intégrale (Ressources non renouvelables)

En réalité, le mix énergétique mondial repose à plus de 80% sur des stocks non renouvelables. Le flux $f(t)$ n'est donc pas purement croissant. Soit S_{tot} le stock total d'énergie

fossile initialement présent dans la croûte terrestre. La physique impose que l'intégrale du flux extrait soit finie :

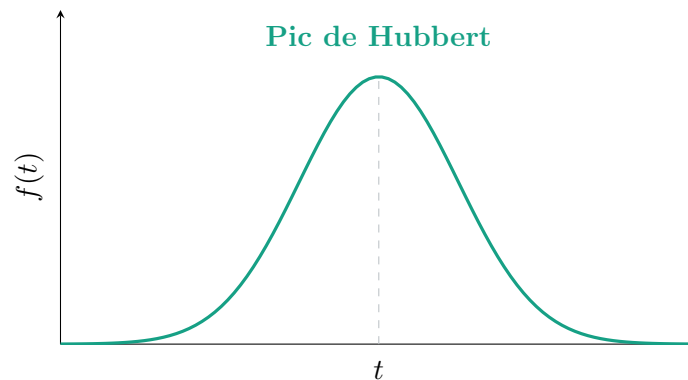
$$\int_0^{+\infty} f(t) dt = S_{tot} < +\infty \quad (4)$$

Pour que cette intégrale converge, une condition nécessaire (sous réserve de régularité de la fonction) est que $\lim_{t \rightarrow +\infty} f(t) = 0$. L'évolution du flux suit alors une courbe en cloche (modèle mathématique de Hubbert), caractérisée par une phase de croissance, un pic ($df/dt = 0$), puis une décroissance inéluctable.

Le pic de Hubbert

Le **pic de Hubbert** est un modèle mathématique développé par le géophysicien Marion King Hubbert en 1956 pour prédire le moment où la production d'une ressource finie atteint son maximum avant de décliner.

https://fr.wikipedia.org/wiki/Pic_de_Hubbert



3 Questionnement de la Limite M face aux Découvertes Récentes

Idée clé

L'objection fondamentale que l'on peut opposer à ce modèle rigide réside dans le statut de la borne M (ou de l'intégrale S_{tot}). Ces constantes sont-elles gravées dans le marbre, ou sont-elles des fonctions dynamiques dépendantes du progrès technologique ?

3.1 Pétroles non conventionnels : Le déplacement de l'asymptote

L'histoire récente du pétrole de schiste (*shale oil*) aux États-Unis a démontré que la limite des réserves extractibles n'est pas purement géologique, mais technico-économique. L'introduction de la fracturation hydraulique et du forage horizontal a permis d'augmenter drastiquement S_{tot} à court terme.

Cependant, Jancovici répond à cela par le concept d'**EROI** (*Energy Return on Investment*). Si l'on extrait plus de pétrole, le coût énergétique de cette extraction augmente

(le pétrole de schiste a un EROI de $\sim 5 : 1$ à $10 : 1$, contre $\sim 100 : 1$ pour le pétrole conventionnel au début du XXe siècle). Mathématiquement, le flux d'énergie *net* disponible pour la société $f_{net}(t) = f(t) \cdot (1 - \frac{1}{EROI})$ peut décroître même si le flux brut $f(t)$ augmente.

3.2 La Fusion Nucléaire : Vers une borne M quasi-infinie ?

Les avancées récentes (comme le seuil de rentabilité scientifique franchi par le *National Ignition Facility* en 2022, obtenant un gain net d'énergie $Q > 1$) relancent l'hypothèse d'une rupture technologique majeure. Si la fusion du deutérium et du tritium devient industrielle, la borne M s'élève à des niveaux d'ordres de grandeur supérieurs à la consommation actuelle de l'humanité, rendant la contrainte de ressources virtuellement nulle pour des millénaires.

Néanmoins, la limite M ne s'efface pas, elle se déplace vers d'autres contraintes physiques du système clos :

- 1. La limite thermique globale :** Même avec une source d'énergie infinie et propre (fusion), toute énergie consommée finit par se dissiper sous forme de chaleur (Premier et Second principes de la thermodynamique). Une croissance exponentielle de la production d'énergie de quelques pourcents par an conduirait, en quelques siècles, à ce que la chaleur thermique dissipée directement par l'homme soit équivalente au flux solaire reçu, provoquant un réchauffement anthropique indépendant des gaz à effet de serre.
- 2. Les limites matérielles :** La fusion nécessite des infrastructures complexes composées de métaux rares, de supraconducteurs, et de tritium (généré à partir de lithium). La borne M énergétique est alors immédiatement remplacée par une borne M_{mat} sur les ressources minérales.

3.3 L'Hydrogène Blanc (Natif)

La découverte récente de gisements massifs d'hydrogène natif (comme en Lorraine, France) offre une lueur d'espoir pour une transition vers un vecteur énergétique décarboné. Mathématiquement, cela modifie la nature de la fonction : l'hydrogène blanc passe du statut de *vecteur* (comme l'hydrogène vert, qui nécessite une électrolyse et donc une perte d'énergie nette) au statut de *source primaire* (un stock). Cela augmente la valeur de S_{tot} , mais reste soumis à la même dynamique de Hubbert que les hydrocarbures traditionnels dès lors que le rythme d'extraction dépasse le rythme de régénération géologique.

3.4 Nouvelles découvertes pétrolières majeures : Russie et Chine

L'année 2024-2025 a vu l'annonce de découvertes pétrolières significatives qui repoussent temporairement les limites de S_{tot} :

- **Russie :** Les gisements géants découverts dans l'Arctique russe (mer de Kara, péninsule de Gydan) et en Sibérie orientale pourraient contenir plusieurs milliards de barils équivalent pétrole. Rosneft a annoncé en 2024 des réserves additionnelles substantielles dans le bassin de Bazhenov (schiste bitumineux).

- **Chine** : Le champ pétrolier de Fuman dans le bassin du Tarim (Xinjiang) a révélé des réserves estimées à plus d'un milliard de tonnes (environ 7 milliards de barils). La Chine a également accru sa production de pétrole de schiste dans le bassin d'Ordos.
- **Guyana, Namibie, Brésil** : Les découvertes offshore profondes continuent de repousser les limites extractibles, notamment avec les pré-salt brésiliens et les bassins atlantiques africains.

Perspective critique

Ces découvertes augmentent S_{tot} mais ne changent pas la nature finie de la ressource. De plus, leur extraction présente un EROI dégradé (conditions extrêmes, profondeurs abyssales, Arctique) et un coût carbone élevé, ce qui limite leur contribution nette à la croissance économique.

3.5 Fusion nucléaire : l'accélération technologique 2022-2026

Les avancées récentes dans la fusion nucléaire méritent une analyse détaillée car elles pourraient fondamentalement modifier la borne M énergétique :

Le seuil d'ignition du NIF (2022)

Le *National Ignition Facility* (NIF) du Lawrence Livermore National Laboratory a franchi en décembre 2022 un seuil historique : pour la première fois, une réaction de fusion par confinement inertiel a produit plus d'énergie que celle délivrée au combustible ($Q > 1$).

Formule

En décembre 2022 :

$$\text{Énergie laser injectée} = 2,05 \text{ MJ} \quad \rightarrow \quad \text{Énergie fusion} = 3,15 \text{ MJ}$$

Soit un gain $Q \approx 1,5$. En juillet 2023, le NIF a atteint $Q \approx 1,9$ avec 3,88 MJ produits.

Cependant, ce bilan reste partiel : l'énergie électrique totale consommée par l'installation pour générer les lasers était d'environ 300 MJ, soit un gain système global bien inférieur à 1.

ITER : le projet international

Le réacteur expérimental **ITER** (International Thermonuclear Experimental Reactor) en construction à Cadarache (France) vise un gain $Q \geq 10$:

- Objectif : produire 500 MW de puissance de fusion à partir de 50 MW injectés
- Première plasma prévue : 2025-2035 (retards accumulés)
- Opérations deutérium-tritium : horizon 2035-2040
- Coût total estimé : > 20 milliards d'euros

ITER

<https://www.iter.org/>

Fusion privée : l'émergence des start-ups

Depuis 2020, plus de 40 entreprises privées lèvent des fonds massifs pour développer des approches alternatives :

- **Commonwealth Fusion Systems (USA)** : aimants supraconducteurs à haute température (REBCO), objectif de démonstration nette d'énergie vers 2025-2026.
- **Helion Energy (USA)** : fusion magnéto-inertielle, contrat avec Microsoft pour fournir de l'électricité d'ici 2028 (objectif très ambitieux).
- **Tokamak Energy (UK)** : tokamaks sphériques compacts avec aimants HTS.
- **Renaissance Fusion (France, Grenoble)** : approche stellarator avec supraconducteurs haute température.

Investissements

Les investissements dans la fusion privée ont dépassé 6 milliards de dollars en 2021-2024, attirés par les progrès technologiques (aimants HTS, supercalculateurs, matériaux résistants aux neutrons).

Les défis restants

Même en cas de succès technique, plusieurs obstacles subsistent avant une contribution significative à M :

1. **Tritium** : Le tritium (T) nécessaire à la réaction D-T n'existe pratiquement pas à l'état naturel. Il doit être produit par irradiation de lithium dans le réacteur lui-même (breeding). Le stock mondial actuel de tritium est insuffisant pour démarrer plusieurs réacteurs simultanément.
2. **Matériaux** : Les parois du réacteur doivent résister à un flux de neutrons de 14 MeV extrême, provoquant une activation et une dégradation rapide des matériaux.
3. **Coût et délai** : Même dans le scénario optimiste, la fusion ne contribuera significativement au mix énergétique mondial qu'après 2050-2060, trop tard pour résoudre la crise climatique immédiate.
4. **Compétition avec les renouvelables** : Le coût nivelé de l'énergie (LCOE) de la fusion devra être compétitif face au solaire et à l'éolien dont les coûts chutent continuellement.

Réalisme temporel

La fusion nucléaire représente une promesse à long terme (horizon 2050-2100) mais ne constitue pas une solution aux contraintes énergétiques des 20-30 prochaines années. La borne M reste donc contraignante à l'échelle de temps des décisions politiques et économiques actuelles.

4 Conclusion

Synthèse

Le raisonnement de Jancovici adossé au théorème de la limite monotone est mathématiquement irréprochable sous l'hypothèse d'un système clos et invariant. Les découvertes technologiques récentes (fusion, hydrogène blanc, schiste) ne brisent pas le théorème, mais modifient dynamiquement la valeur des paramètres M et S_{tot} .

Attention

La thermodynamique rappelle que l'énergie n'est qu'un levier pour transformer la matière. Une source d'énergie infinie (fusion) se heurterait inexorablement à la finitude des autres stocks de la planète (terres arables, eau douce, métaux). La croissance infinie dans un monde fini reste une impossibilité mathématique, la seule variable d'ajustement technologique étant la date de l'inflexion de la courbe.

5 Références et lectures complémentaires

- **Ayres, R. U., & Warr, B. (2003)**. Exergy, power and work in the US economy, 1900–1998. *Energy*, 28(3), 219-273.
[DOI: 10.1016/S0360-5442\(02\)00089-7](https://doi.org/10.1016/S0360-5442(02)00089-7)
- **Jancovici, J.-M. (2012)**. Les limites énergétiques de la croissance. *Le Débat*, 171(4), 80-93.
[Cairn.info : Le Débat 2012/4](https:// Cairn.info : Le Débat 2012/4)
- **Université de Montpellier (2021)**. À l'échelle mondiale, aucun découplage à attendre entre PIB et consommation d'énergie.
[UM Montpellier : Article de synthèse](#)
- **Hubbert, M. K. (1956)**. Nuclear Energy and the Fossil Fuels. *Drilling and Production Practice*, API, 7-25.
[Wikipedia : Pic de Hubbert](#)
- **Biophysical Economics Association**. What is Biophysical Economics?
biophyseco.org
- **Rosneft & Ministère de l'Énergie russe (2024)**. Découvertes dans l'Arctique russe et le bassin de Bazhenov.
rosneft.com
- **China National Petroleum Corporation (2023)**. Découverte du champ de Fuman, bassin du Tarim.
cnpc.com.cn
- **National Ignition Facility (2022-2024)**. Ignition et gains énergétiques successifs. Lawrence Livermore National Laboratory.
lasers.llnl.gov
- **ITER Organization**. Status and progress of the ITER project.
iter.org

- **Fusion Industry Association (2024)**. The Global Fusion Industry in 2024.
fusionindustryassociation.org