La Dérivation

Première, Terminale et Formation Continue

Idée clé

La dérivation permet d'étudier les variations locales d'une fonction. Elle correspond à la pente de la tangente au point considéré.

Table des matières

1 Taux de Variation Moyen

Taux d'accroissement

Soit f une fonction définie sur un intervalle I et $x_0 \in I$. Soit h un réel non nul tel que $x_0 + h \in I$.
Le **taux de variation moyen** (ou taux d'accroissement) de f entre x_0 et $x_0 + h$ est :

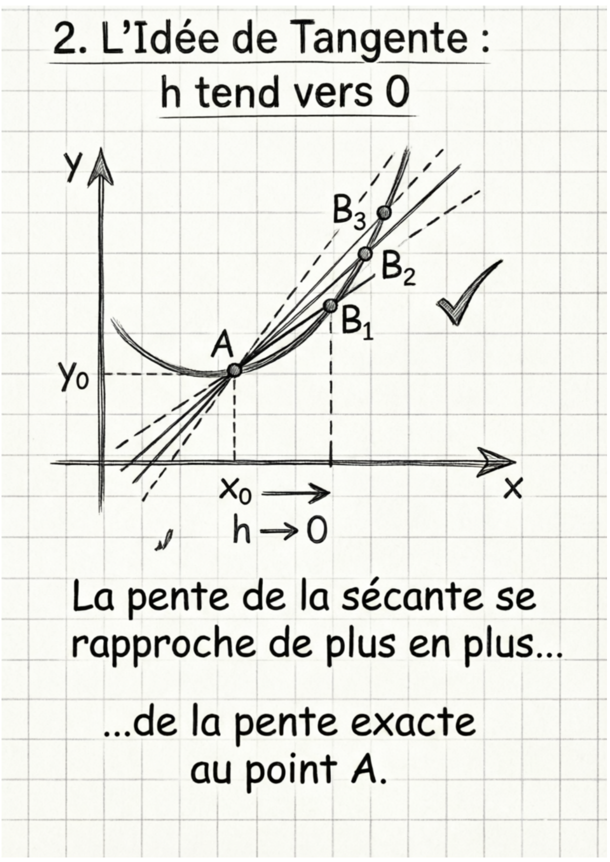
$$\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h} = \frac{\Delta y}{\Delta x}$$

Interprétation géométrique

Ce taux représente la **pente de la droite sécante** passant par les points $A(x_0, f(x_0))$ et $B(x_0 + h, f(x_0 + h))$.
En physique, c'est la **vitesse moyenne** sur l'intervalle $[x_0, x_0 + h]$.

2 L'idée de Tangente : Limite

Pour obtenir la pente exacte au point A, on fait tendre l'écart h vers 0. Le point B se rapproche de A sur la courbe.



Idée clé

Quand h devient très petit (tend vers 0), la droite sécante AB devient la **tangente** à la courbe au point A.
La pente de la sécante se rapproche de la pente exacte de la tangente.

3 Taux de Variation Instantané

Nombre dérivé

Si le taux d'accroissement a une limite finie quand h tend vers 0, on dit que f est **dérivable** en x_0.
Cette limite est appelée le **nombre dérivé** de f en x_0, noté $f'(x_0)$.

Formule de la Dérivée

$$f'(x_0) = \lim_{h \to 0} \left[\frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} \right]$$

Interprétation : $f'(x_0)$ est le coefficient directeur de la tangente à la courbe de f au point d'abscisse x_0.

4 Démonstrations des Dérivées Usuelles

Dans cette section, nous allons **démontrer** les formules de dérivation en utilisant directement la définition :

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

4.1 Fonction constante : $f(x) = \lambda$

Démonstration

Soit $f(x) = \lambda$ où λ est une constante réelle.
Étape 1 : Calculons le taux d'accroissement :

$$\frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \frac{\lambda - \lambda}{h} = \frac{0}{h} = 0$$

Étape 2 : Passons à la limite quand $h \to 0$:

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} 0 = 0$$

Conclusion : Pour toute fonction constante, $\boxed{f'(x) = 0}$

4.2 Fonction identité : $f(x) = x$

Démonstration

Soit $f(x) = x$.
Étape 1 : Calculons le taux d'accroissement :

$$\frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \frac{(x+h) - x}{h} = \frac{h}{h} = 1$$

Étape 2 : Passons à la limite quand $h \to 0$:

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} 1 = 1$$

Conclusion : $\boxed{f'(x) = 1}$

4.3 Fonction puissance : $f(x) = x^n$ (où $n \in \mathbb{N}^*$)

Démonstration

Soit $f(x) = x^n$ où n est un entier naturel non nul.
Étape 1 : Calculons le taux d'accroissement :

$$\frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \frac{(x+h)^n - x^n}{h}$$

Étape 2 : Développons $(x+h)^n$ avec la formule du binôme de Newton :

$$(x+h)^n = x^n + nx^{n-1}h + \frac{n(n-1)}{2}x^{n-2}h^2 + \ldots + h^n$$

Étape 3 : Simplifions :

$$\begin{aligned}
\frac{(x+h)^n - x^n}{h} &= \frac{(x^n + nx^{n-1}h + \text{termes en } h^2 \text{ et plus}) - x^n}{h} \\
&= \frac{nx^{n-1}h + \text{termes en } h^2 \text{ et plus}}{h} \\
&= nx^{n-1} + \text{termes contenant } h
\end{aligned}$$

Étape 4 : Passons à la limite quand $h \to 0$:

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \left(nx^{n-1} + \text{termes contenant } h \right) = nx^{n-1}$$

Conclusion : $\boxed{f'(x) = nx^{n-1}}$

Exemples

— Si $f(x) = x^2$, alors $f'(x) = 2x$
— Si $f(x) = x^3$, alors $f'(x) = 3x^2$
— Si $f(x) = x^5$, alors $f'(x) = 5x^4$

4.4 Fonction inverse : $f(x) = \frac{1}{x}$

Démonstration

Soit $f(x) = \frac{1}{x}$ définie sur $\mathbb{R}^*$.
Étape 1 : Calculons le taux d'accroissement :

$$\frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \frac{\frac{1}{x+h} - \frac{1}{x}}{h}$$

Étape 2 : Mettons au même dénominateur :

$$\frac{\frac{1}{x+h} - \frac{1}{x}}{h} = \frac{\frac{x-(x+h)}{x(x+h)}}{h} = \frac{\frac{-h}{x(x+h)}}{h}$$

Étape 3 : Simplifions par h :

$$\frac{-h}{x(x+h) \cdot h} = \frac{-1}{x(x+h)}$$

Étape 4 : Passons à la limite quand $h \to 0$:

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{-1}{x(x+h)} = \frac{-1}{x \cdot x} = -\frac{1}{x^2}$$

Conclusion : $\boxed{f'(x) = -\frac{1}{x^2}}$ pour $x \neq 0$

4.5 Fonction racine carrée : $f(x) = \sqrt{x}$

Démonstration

Soit $f(x) = \sqrt{x}$ définie sur $[0, +\infty[$.
Étape 1 : Calculons le taux d'accroissement pour $x > 0$:

$$\frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \frac{\sqrt{x+h} - \sqrt{x}}{h}$$

Étape 2 : Multiplions par l'expression conjuguée pour lever l'indétermination :

$$\begin{aligned}
\frac{\sqrt{x+h} - \sqrt{x}}{h} &= \frac{\sqrt{x+h} - \sqrt{x}}{h} \times \frac{\sqrt{x+h} + \sqrt{x}}{\sqrt{x+h} + \sqrt{x}} \\
&= \frac{(x+h) - x}{h(\sqrt{x+h} + \sqrt{x})} \\
&= \frac{h}{h(\sqrt{x+h} + \sqrt{x})} \\
&= \frac{1}{\sqrt{x+h} + \sqrt{x}}
\end{aligned}$$

Étape 3 : Passons à la limite quand $h \to 0$:

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{1}{\sqrt{x+h} + \sqrt{x}} = \frac{1}{\sqrt{x} + \sqrt{x}} = \frac{1}{2\sqrt{x}}$$

Conclusion : $\boxed{f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}}$ pour $x > 0$

Point important

La fonction racine carrée n'est **pas dérivable en 0**. Le taux d'accroissement tend vers $+\infty$ quand $h \to 0^+$, ce qui correspond à une tangente verticale.

5 Récapitulatif des Dérivées Usuelles

Formules à connaître par cœur

Fonction $f(x)$	**Intervalle**	**Dérivée** $f'(x)$
λ (constante)	$\mathbb{R}$	0
x	$\mathbb{R}$	1
x^n	$\mathbb{R}$	nx^{n-1}
$\frac{1}{x}$	$\mathbb{R}^*$	$-\frac{1}{x^2}$
$\frac{1}{x^n}$	$\mathbb{R}^*$	$-\frac{n}{x^{n+1}}$
$\sqrt{x}$	$]0,+\infty[$	$\frac{1}{2\sqrt{x}}$

Méthodologie

Pour démontrer la dérivée d'une fonction :

1. Écrire le taux d'accroissement $\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$
2. Simplifier l'expression (développement, factorisation, quantité conjuguée...)
3. Passer à la limite quand $h \to 0$
4. Conclure sur la valeur de $f'(x)$

6 Limites Fondamentales et Dérivées de $\sin x$ et $\cos x$

Cette section est cruciale pour étendre le calcul de dérivées aux fonctions trigonométriques. Nous allons démontrer deux limites fondamentales à l'aide d'un raisonnement géométrique, puis les utiliser pour calculer les dérivées de $\sin x$ et $\cos x$.

6.1 Limite de $\dfrac{\sin x}{x}$ en 0

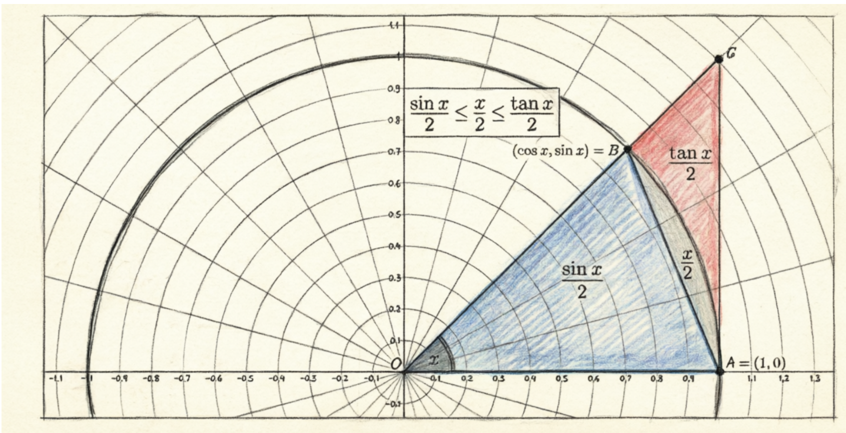
Approche géométrique

Plaçons-nous dans un cercle trigonométrique de rayon 1. Pour un angle $x \in]0, \frac{\pi}{2}[$, comparons trois aires :

- Aire du triangle bleu OAB : $\frac{1\times\sin x}{2} = \frac{\sin x}{2}$
- Aire du secteur circulaire gris : $\frac{x}{2}$
- Aire du triangle rouge OAC : $\frac{1\times\tan x}{2} = \frac{\tan x}{2}$

Par inclusion géométrique, on obtient l'inégalité :

$$\frac{\sin x}{2} \leq \frac{x}{2} \leq \frac{\tan x}{2}$$



Démonstration

Étape 1 : Simplifions l'inégalité par $\frac{1}{2}$:

$$\sin x \leq x \leq \tan x$$

Étape 2 : Divisons par $\sin x > 0$ (sur $]0, \frac{\pi}{2}[$) :

$$1 \leq \frac{x}{\sin x} \leq \frac{1}{\cos x}$$

Étape 3 : Prenons l'inverse (l'ordre s'inverse car tout est positif) :

$$\cos x \leq \frac{\sin x}{x} \leq 1$$

Étape 4 : Passons à la limite quand $x \to 0^+$. Comme $\lim_{x\to 0} \cos x = 1$ et $\lim_{x\to 0} 1 = 1$, le **théorème des gendarmes** impose :

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{\sin x}{x} = 1$$

La fonction $\frac{\sin x}{x}$ est paire, donc le résultat vaut aussi quand $x \to 0^-$.

Conclusion : $\boxed{\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1}$

6.2 Limite de $\dfrac{1-\cos x}{x}$ en 0

Attention

Quand $x \to 0$, le numérateur tend vers 0 et le dénominateur aussi. Nous sommes face à une **forme indéterminée** $\frac{0}{0}$. Il faut transformer l'expression.

Démonstration

Étape 1 : Multiplions par la quantité conjuguée $\frac{1+\cos x}{1+\cos x}$:

$$\frac{1-\cos x}{x} = \frac{1-\cos x}{x} \times \frac{1+\cos x}{1+\cos x} = \frac{1-\cos^2 x}{x(1+\cos x)}$$

Étape 2 : Utilisons l'identité pythagoricienne $1-\cos^2 x = \sin^2 x$:

$$\frac{\sin^2 x}{x(1+\cos x)} = \frac{\sin x}{x} \times \frac{\sin x}{1+\cos x}$$

Étape 3 : Passons à la limite en utilisant la limite d'un produit :

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to 0} \frac{1-\cos x}{x} &= \lim_{x\to 0} \left(\frac{\sin x}{x} \times \frac{\sin x}{1+\cos x}\right) \\
&= \left(\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x}\right) \times \left(\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{1+\cos x}\right) \\
&= 1 \times \frac{0}{1+1} = 1 \times 0 = 0
\end{aligned}$$

Conclusion : $\boxed{\lim_{x\to 0} \frac{1-\cos x}{x} = 0}$

6.3 Dérivées de $\sin x$ et $\cos x$

Nous sommes maintenant prêts à calculer les dérivées des fonctions trigonométriques en utilisant la définition par limite et les formules d'addition.

Dérivée de $\sin x$

Étape 1 : Écrivons le taux d'accroissement :

$$\frac{\sin(x+h) - \sin x}{h}$$

Étape 2 : Utilisons $\sin(x+h) = \sin x \cos h + \cos x \sin h$:

$$\begin{aligned}\frac{\sin x \cos h + \cos x \sin h - \sin x}{h} &= \frac{\sin x(\cos h - 1) + \cos x \sin h}{h} \\ &= \sin x \frac{\cos h - 1}{h} + \cos x \frac{\sin h}{h}\end{aligned}$$

Étape 3 : Passons à la limite quand $h \to 0$:

$$\lim_{h \to 0} \left[\sin x \underbrace{\frac{\cos h - 1}{h}}_{\to 0} + \cos x \underbrace{\frac{\sin h}{h}}_{\to 1} \right] = \sin x \times 0 + \cos x \times 1 = \cos x$$

Conclusion : $\boxed{(\sin x)' = \cos x}$

Dérivée de $\cos x$

Étape 1 : Écrivons le taux d'accroissement :

$$\frac{\cos(x+h) - \cos x}{h}$$

Étape 2 : Utilisons $\cos(x+h) = \cos x \cos h - \sin x \sin h$:

$$\begin{aligned}\frac{\cos x \cos h - \sin x \sin h - \cos x}{h} &= \frac{\cos x(\cos h - 1) - \sin x \sin h}{h} \\ &= \cos x \frac{\cos h - 1}{h} - \sin x \frac{\sin h}{h}\end{aligned}$$

Étape 3 : Passons à la limite quand $h \to 0$:

$$\lim_{h \to 0} \left[\cos x \underbrace{\frac{\cos h - 1}{h}}_{\to 0} - \sin x \underbrace{\frac{\sin h}{h}}_{\to 1} \right] = \cos x \times 0 - \sin x \times 1 = -\sin x$$

Conclusion : $\boxed{(\cos x)' = -\sin x}$

Résultats à retenir

$$(\sin x)' = \cos x \qquad \text{et} \qquad (\cos x)' = -\sin x$$

Ces formules sont valables pour tout $x \in \mathbb{R}$.