Équations Trigonométriques

Sinus, Cosinus et Périodicité

Niveau Première/Terminale

Idée clé

Les fonctions trigonométriques sont **périodiques** : elles répètent les mêmes valeurs à intervalles réguliers. Cette propriété est fondamentale pour résoudre les équations trigonométriques car elle génère une infinité de solutions !

Table des matières

1 La périodicité des fonctions trigonométriques

Définition

Fonction périodique. Une fonction f est dite **périodique** de période T si pour tout réel x :

$$f(x+T) = f(x)$$

La plus petite valeur positive de T est appelée **période fondamentale**.

Formule

Périodes des fonctions usuelles :

- **Sinus et Cosinus** : période 2π

$$\sin(x+2\pi) = \sin(x) \quad \text{et} \quad \cos(x+2\pi) = \cos(x)$$

- **Tangente** : période π

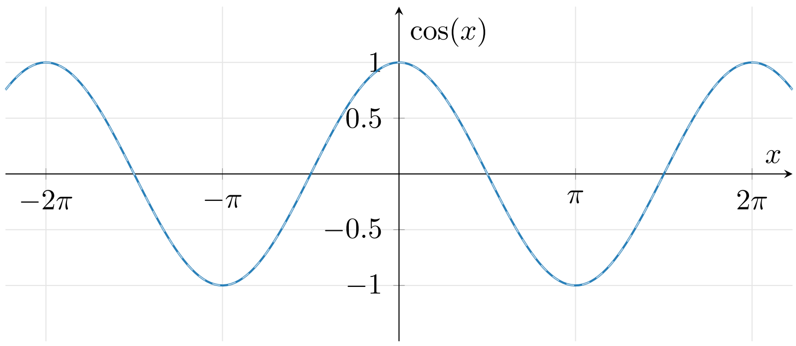
$$\tan(x+\pi) = \tan(x)$$

Idée clé

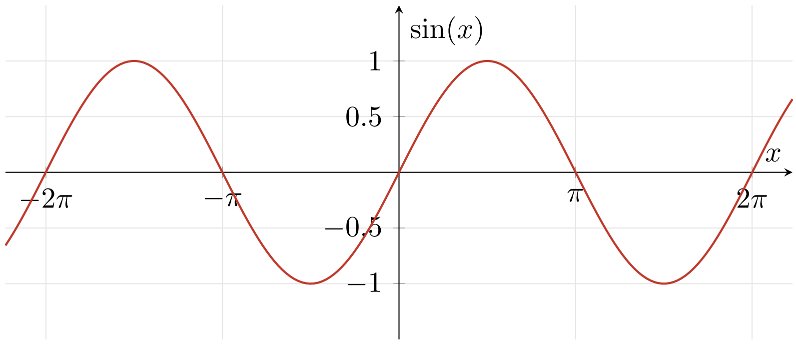
Cela signifie que si vous connaissez les valeurs de $\sin(x)$ et $\cos(x)$ sur un intervalle de longueur 2π (par exemple $[0; 2\pi]$ ou $[-\pi; \pi]$), vous les connaissez sur $\mathbb{R}$ tout entier !

2 Représentation graphique sur plusieurs périodes

2.1 La fonction cosinus



2.2 La fonction sinus



Attention

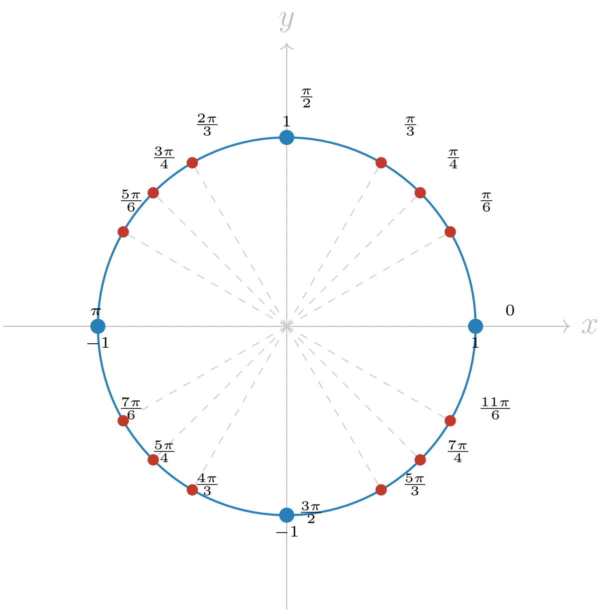
Sur les graphiques ci-dessus, on observe clairement la **répétition** du motif tous les 2π. C'est la périodicité en action !

3 Le cercle trigonométrique

Définition

Le **cercle trigonométrique** est un cercle de rayon 1 centré à l'origine. À chaque angle x (en radians), on associe :

- Le **cosinus** : abscisse du point sur le cercle
- Le **sinus** : ordonnée du point sur le cercle



4 Valeurs remarquables à connaître

Formule

Tableau des valeurs usuelles :

Angle x	**0** **(0°)**	$\frac{\pi}{6}$ **(30°)**	$\frac{\pi}{4}$ **(45°)**	$\frac{\pi}{3}$ **(60°)**	$\frac{\pi}{2}$ **(90°)**
$\cos(x)$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0
$\sin(x)$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1

Idée clé

Astuce mémotechnique pour le cosinus :
$\cos(0) = \frac{\sqrt{4}}{2} = 1$, $\cos(\frac{\pi}{6}) = \frac{\sqrt{3}}{2}$, $\cos(\frac{\pi}{4}) = \frac{\sqrt{2}}{2}$, $\cos(\frac{\pi}{3}) = \frac{\sqrt{1}}{2}$, $\cos(\frac{\pi}{2}) = \frac{\sqrt{0}}{2} = 0$
On décroche de 4 à 0 sous la racine !

Idée clé

Pour le sinus, c'est l'inverse : on croît de 0 à 4 sous la racine.

5 Résolution d'équations simples

5.1 Équations du type $\cos(x) = a$

Formule

Méthode de résolution :
Pour résoudre $\cos(x) = a$ où $a \in [-1; 1]$:

1. Trouver l'angle de référence $\alpha \in [0; \pi]$ tel que $\cos(\alpha) = a$

2. Les solutions sur $[0; 2\pi]$ sont : $x = \alpha$ ou $x = -\alpha$ (ou $2\pi - \alpha$)

3. Sur $\mathbb{R}$, on ajoute la périodicité :

$$\boxed{x = \alpha + 2k\pi \quad \text{ou} \quad x = -\alpha + 2k\pi, \quad k \in \mathbb{Z}}$$

Exercice

Résoudre dans $\mathbb{R}$: $\cos(x) = \frac{1}{2}$

Correction

1. On cherche α tel que $\cos(\alpha) = \frac{1}{2}$. D'après le tableau : $\alpha = \frac{\pi}{3}$

2. Sur $[0; 2\pi]$, les solutions sont : $x = \frac{\pi}{3}$ et $x = -\frac{\pi}{3}$ (ou $\frac{5\pi}{3}$)

3. Sur $\mathbb{R}$, avec la périodicité :

$$x = \frac{\pi}{3} + 2k\pi \quad \text{ou} \quad x = -\frac{\pi}{3} + 2k\pi, \quad k \in \mathbb{Z}$$

Ensemble des solutions :

$$\mathcal{S} = \left\{\frac{\pi}{3} + 2k\pi, -\frac{\pi}{3} + 2k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\right\}$$

Exercice

Résoudre dans $\mathbb{R}$: $\cos(x) = -\frac{1}{2}$

Correction

1. On cherche α tel que $\cos(\alpha) = -\frac{1}{2}$.
On sait que $\cos(\frac{\pi}{3}) = \frac{1}{2}$, donc par symétrie : $\cos(\pi - \frac{\pi}{3}) = -\frac{1}{2}$
Ainsi : $\alpha = \frac{2\pi}{3}$

2. Sur $[0; 2\pi]$, les solutions sont : $x = \frac{2\pi}{3}$ et $x = -\frac{2\pi}{3}$ (ou $\frac{4\pi}{3}$)

3. Sur $\mathbb{R}$:

$$x = \frac{2\pi}{3} + 2k\pi \quad \text{ou} \quad x = -\frac{2\pi}{3} + 2k\pi, \quad k \in \mathbb{Z}$$

Ensemble des solutions :

$$\mathcal{S} = \left\{\frac{2\pi}{3} + 2k\pi, -\frac{2\pi}{3} + 2k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\right\}$$

5.2 Équations du type $\sin(x) = b$

Formule

Méthode de résolution :
Pour résoudre $\sin(x) = b$ où $b \in [-1; 1]$:

1. Trouver l'angle de référence $\beta \in [-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}]$ tel que $\sin(\beta) = b$

2. Les solutions sur $[0; 2\pi]$ sont : $x = \beta$ ou $x = \pi - \beta$

3. Sur $\mathbb{R}$:

$$\boxed{x = \beta + 2k\pi \quad \text{ou} \quad x = \pi - \beta + 2k\pi, \quad k \in \mathbb{Z}}$$

Exercice

Résoudre dans $\mathbb{R}$: $\sin(x) = \frac{1}{2}$

Correction

1. On cherche β tel que $\sin(\beta) = \frac{1}{2}$. D'après le tableau : $\beta = \frac{\pi}{6}$

2. Sur $[0; 2\pi]$, les solutions sont : $x = \frac{\pi}{6}$ et $x = \pi - \frac{\pi}{6} = \frac{5\pi}{6}$

3. Sur $\mathbb{R}$:

$$x = \frac{\pi}{6} + 2k\pi \quad \text{ou} \quad x = \frac{5\pi}{6} + 2k\pi, \quad k \in \mathbb{Z}$$

Ensemble des solutions :

$$\mathcal{S} = \left\{\frac{\pi}{6} + 2k\pi, \frac{5\pi}{6} + 2k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\right\}$$

Exercice

Résoudre dans $\mathbb{R}$: $\sin(x) = \frac{\sqrt{3}}{2}$

Correction

1. On cherche β tel que $\sin(\beta) = \frac{\sqrt{3}}{2}$. D'après le tableau : $\beta = \frac{\pi}{3}$

2. Sur $[0; 2\pi]$, les solutions sont : $x = \frac{\pi}{3}$ et $x = \pi - \frac{\pi}{3} = \frac{2\pi}{3}$

3. Sur $\mathbb{R}$:

$$x = \frac{\pi}{3} + 2k\pi \quad \text{ou} \quad x = \frac{2\pi}{3} + 2k\pi, \quad k \in \mathbb{Z}$$

Ensemble des solutions :

$$\mathcal{S} = \left\{\frac{\pi}{3} + 2k\pi, \frac{2\pi}{3} + 2k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\right\}$$

6 Équations plus complexes : $\cos(ax + b) = c$

Idée clé

Nouvelle difficulté : Lorsque l'argument du cosinus n'est pas juste x mais une expression comme $2x + \frac{\pi}{3}$, il faut :

1. Poser $X = ax + b$ (changement de variable)

2. Résoudre $\cos(X) = c$ pour trouver les valeurs de X

3. Revenir à x en résolvant $ax + b = X$

Exercice

Résoudre dans $\mathbb{R}$: $\cos\left(2x + \frac{\pi}{3}\right) = \frac{1}{2}$

Correction

Étape 1 : Changement de variable
Posons $X = 2x + \frac{\pi}{3}$. L'équation devient :

$$\cos(X) = \frac{1}{2}$$

Étape 2 : Résolution pour X
D'après ce qu'on a vu :

$$X = \frac{\pi}{3} + 2k\pi \quad \text{ou} \quad X = -\frac{\pi}{3} + 2k\pi, \quad k \in \mathbb{Z}$$

Étape 3 : Retour à x
On remplace X par $2x + \frac{\pi}{3}$:
Cas 1 : $2x + \frac{\pi}{3} = \frac{\pi}{3} + 2k\pi$
$2x = 2k\pi$
$x = k\pi$
Cas 2 : $2x + \frac{\pi}{3} = -\frac{\pi}{3} + 2k\pi$
$2x = -\frac{2\pi}{3} + 2k\pi$
$x = -\frac{\pi}{3} + k\pi$
Ensemble des solutions :

$$\mathcal{S} = \left\{k\pi, -\frac{\pi}{3} + k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\right\}$$

Exercice

Résoudre dans l'intervalle $[0; 2\pi]$: $\cos\left(3x - \frac{\pi}{4}\right) = -\frac{1}{2}$

Correction

Étape 1 : Changement de variable
Posons $X = 3x - \frac{\pi}{4}$. L'équation devient :

$$\cos(X) = -\frac{1}{2}$$

Étape 2 : Résolution pour X

$$X = \frac{2\pi}{3} + 2k\pi \quad \text{ou} \quad X = -\frac{2\pi}{3} + 2k\pi, \quad k \in \mathbb{Z}$$

Étape 3 : Retour à x

Cas 1 : $3x - \frac{\pi}{4} = \frac{2\pi}{3} + 2k\pi$
$3x = \frac{2\pi}{3} + \frac{\pi}{4} + 2k\pi = \frac{8\pi+3\pi}{12} + 2k\pi = \frac{11\pi}{12} + 2k\pi$
$x = \frac{11\pi}{36} + \frac{2k\pi}{3}$
Cas 2 : $3x - \frac{\pi}{4} = -\frac{2\pi}{3} + 2k\pi$
$3x = -\frac{2\pi}{3} + \frac{\pi}{4} + 2k\pi = \frac{-8\pi+3\pi}{12} + 2k\pi = -\frac{5\pi}{12} + 2k\pi$
$x = -\frac{5\pi}{36} + \frac{2k\pi}{3}$
Étape 4 : Filtrage sur $[0; 2\pi]$

Pour **Cas 1** : $x = \frac{11\pi}{36} + \frac{2k\pi}{3}$

- $k = 0 : x = \frac{11\pi}{36} \approx 0.96 \in [0; 2\pi]$
- $k = 1 : x = \frac{11\pi}{36} + \frac{2\pi}{3} = \frac{11\pi+24\pi}{36} = \frac{35\pi}{36} \approx 3.05 \in [0; 2\pi]$
- $k = 2 : x = \frac{11\pi}{36} + \frac{4\pi}{3} = \frac{11\pi+48\pi}{36} = \frac{59\pi}{36} \approx 5.15 \in [0; 2\pi]$
- $k = 3 : x = \frac{11\pi}{36} + 2\pi = \frac{83\pi}{36} > 2\pi$

Pour **Cas 2** : $x = -\frac{5\pi}{36} + \frac{2k\pi}{3}$

- $k = 0 : x = -\frac{5\pi}{36} < 0$
- $k = 1 : x = -\frac{5\pi}{36} + \frac{2\pi}{3} = \frac{-5\pi+24\pi}{36} = \frac{19\pi}{36} \approx 1.66 \in [0; 2\pi]$
- $k = 2 : x = -\frac{5\pi}{36} + \frac{4\pi}{3} = \frac{-5\pi+48\pi}{36} = \frac{43\pi}{36} \approx 3.75 \in [0; 2\pi]$
- $k = 3 : x = -\frac{5\pi}{36} + 2\pi = \frac{67\pi}{36} \approx 5.84 \in [0; 2\pi]$
- $k = 4 : x = -\frac{5\pi}{36} + \frac{8\pi}{3} > 2\pi$

Ensemble des solutions sur $[0; 2\pi]$ **:**

$$\mathcal{S} = \left\{ \frac{11\pi}{36}, \frac{35\pi}{36}, \frac{59\pi}{36}, \frac{19\pi}{36}, \frac{43\pi}{36}, \frac{67\pi}{36} \right\}$$

7 La fonction tangente (pour aller plus loin)

Définition

La **tangente** est définie par :

$$\tan(x) = \frac{\sin(x)}{\cos(x)}$$

Elle n'est **pas définie** lorsque $\cos(x) = 0$, c'est-à-dire pour $x = \frac{\pi}{2} + k\pi$.

Formule

Propriétés de la tangente :

- Période : π (et non 2π !)

$$\tan(x + \pi) = \tan(x)$$

- Équation $\tan(x) = a$ (pour tout $a \in \mathbb{R}$) :

$$x = \arctan(a) + k\pi, \quad k \in \mathbb{Z}$$

Attention

Contrairement au sinus et au cosinus, la tangente peut prendre **n'importe quelle valeur réelle** (elle n'est pas bornée entre -1 et 1). De plus, sa période est π et non 2π !

8 Synthèse et méthodologie

Formule

Résumer pour résoudre une équation trigonométrique :

1. **Identifier** le type d'équation (cos, sin ou tan)
2. **Vérifier** que la valeur est dans le domaine :
   — Pour $\cos(x) = a$ et $\sin(x) = b$: $a, b \in [-1; 1]$
   — Pour $\tan(x) = c$: $c \in \mathbb{R}$ (toujours possible)
3. **Trouver** l'angle de référence en utilisant le cercle trigonométrique ou le tableau
4. **Appliquer** les formules de solutions selon la fonction
5. **Ajouter** la périodicité ($2k\pi$ pour sin/cos, $k\pi$ pour tan)
6. Si l'argument est complexe ($ax + b$), faire un **changement de variable**
7. Si un intervalle est imposé, **filtrer** les solutions

Idée clé

Le secret de la rússite : Maîtriser parfaitement le **cercle trigonométrique** et les **valeurs remarquables**. Avec cela, 90% des équations trigonométriques deviennent simples !

9 Équations de la forme $a\cos(x) + b\sin(x) = c$

Idée clé

Lorsqu'une équation mélange $\cos(x)$ et $\sin(x)$ avec des coefficients différents, on ne peut pas appliquer directement les formules précédentes. L'astuce consiste à **regrouper les deux termes en une seule fonction trigonométrique décalée**. C'est ce qu'on appelle la **méthode de l'angle auxiliaire** (ou forme harmonique).

Formule

Méthode de résolution pour $a\cos(x) + b\sin(x) = c$:

1. **Calculer l'amplitude :** $R = \sqrt{a^2 + b^2} \quad (R > 0)$
2. **Définir l'angle auxiliaire α :**

$$\cos(\alpha) = \frac{a}{R} \quad \text{et} \quad \sin(\alpha) = \frac{b}{R}$$

   (Cet angle est unique modulo 2π)
3. **Transformer l'équation :**

$$a\cos(x) + b\sin(x) = R\big(\cos(\alpha)\cos(x) + \sin(\alpha)\sin(x)\big) = R\cos(x - \alpha)$$

   L'équation devient : $\boxed{\cos(x - \alpha) = \frac{c}{R}}$
4. **Résoudre** comme une équation cosinus classique, en n'oubliant pas de soustraire α à la fin.

Attention

Condition d'existence : L'équation n'admet des solutions réelles que si $|c| \leq R$, c'est-à-dire $c^2 \leq a^2 + b^2$.
Si $|c| > R$, l'ensemble des solutions est **vide** ($\mathcal{S} = \varnothing$).

Exercice

Résoudre dans $\mathbb{R}$: $3\cos(x) - 4\sin(x) = 2$

Correction

Étape 1 : Calcul de R
$R = \sqrt{3^2 + (-4)^2} = \sqrt{9+16} = 5$
Étape 2 : Définition de α
$\cos(\alpha) = \frac{3}{5}$ et $\sin(\alpha) = -\frac{4}{5}$.
On note que $\alpha \in]-\frac{\pi}{2}; 0[$ (quadrant IV). On peut garder $\alpha = \arccos\left(\frac{3}{5}\right)$ avec la bonne branche, ou utiliser la notation symbolique.
Étape 3 : Transformation
$3\cos(x) - 4\sin(x) = 5\cos(x - \alpha)$
L'équation devient : $5\cos(x-\alpha) = 2 \iff \cos(x-\alpha) = \frac{2}{5}$
Étape 4 : Résolution
$\cos(X) = \frac{2}{5} \implies X = \pm\arccos\left(\frac{2}{5}\right) + 2k\pi, \quad k \in \mathbb{Z}$
En revenant à x :

$$x - \alpha = \pm\arccos\left(\frac{2}{5}\right) + 2k\pi$$

$$x = \alpha \pm \arccos\left(\frac{2}{5}\right) + 2k\pi, \quad k \in \mathbb{Z}$$

Ensemble des solutions :

$$\mathcal{S} = \left\{\alpha + \arccos\left(\frac{2}{5}\right) + 2k\pi,\ \alpha - \arccos\left(\frac{2}{5}\right) + 2k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\right\}$$

avec α vérifiant $\cos(\alpha) = \frac{3}{5}$ et $\sin(\alpha) = -\frac{4}{5}$.

Exercice

Résoudre dans $\mathbb{R}$: $\sqrt{2}\cos(x) + \sqrt{2}\sin(x) = 1$

Correction

Étape 1 : $R = \sqrt{(\sqrt{2})^2 + (\sqrt{2})^2} = \sqrt{2+2} = 2$
Étape 2 : $\cos(\alpha) = \frac{\sqrt{2}}{2}$ et $\sin(\alpha) = \frac{\sqrt{2}}{2} \implies \alpha = \frac{\pi}{4}$
Étape 3 : Transformation
$\sqrt{2}\cos(x) + \sqrt{2}\sin(x) = 2\cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right)$
L'équation devient : $2\cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right) = 1 \iff \cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right) = \frac{1}{2}$
Étape 4 : Résolution
$x - \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{3} + 2k\pi \quad \text{ou} \quad x - \frac{\pi}{4} = -\frac{\pi}{3} + 2k\pi$
Cas 1 : $x = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{3} + 2k\pi = \frac{7\pi}{12} + 2k\pi$
Cas 2 : $x = \frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{3} + 2k\pi = -\frac{\pi}{12} + 2k\pi$
Ensemble des solutions :

$$\mathcal{S} = \left\{\frac{7\pi}{12} + 2k\pi,\ -\frac{\pi}{12} + 2k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\right\}$$

10 Autres techniques avancées

Idée clé

Certaines équations ne se prêtent pas à la forme harmonique. Voici deux méthodes classiques pour traiter des cas fréquents au baccalauréat.

10.1 Équations quadratiques en $\sin(x)$ ou $\cos(x)$

Formule

Si l'équation ne contient qu'une seule fonction trigonométrique mais avec des puissances, on utilise un **changement de variable algébrique**.
Exemple type : $2\sin^2(x) - 3\sin(x) + 1 = 0$

1. Poser $u = \sin(x)$. L'équation devient $2u^2 - 3u + 1 = 0$
2. Résoudre le polynôme : $\Delta = 9 - 8 = 1 \implies u = 1$ ou $u = \frac{1}{2}$
3. Revenir à x : $\sin(x) = 1$ ou $\sin(x) = \frac{1}{2}$
4. Résoudre chaque équation trigonométrique classique

10.2 Équations homogènes de degré 2

Formule

Pour les équations de la forme $A\cos^2(x) + B\sin(x)\cos(x) + C\sin^2(x) = D$:

1. **Méthode 1 :** Utiliser $\cos^2(x) + \sin^2(x) = 1$ pour écrire $D = D(\cos^2(x) + \sin^2(x))$ et tout ramener à une équation homogène.
2. **Méthode 2 (si $\cos(x) \neq 0$) :** Diviser par $\cos^2(x)$ pour obtenir une équation en $\tan(x)$:
$$A + B\tan(x) + C\tan^2(x) = D(1 + \tan^2(x))$$
Puis résoudre comme une équation quadratique en $\tan(x)$.

Attention

Cas singulier : Si vous divisez par $\cos^2(x)$, vous devez vérifier séparément si $\cos(x) = 0$ est solution de l'équation initiale. Si oui, ajoutez ces solutions avant de diviser.

11 Synthèse globale : Arbre de décision

Formule

Comment choisir la méthode ?

1. **Une seule fonction, argument linéaire :** $\cos(ax+b)=c$ ou $\sin(ax+b)=c$
   $\rightarrow$ Changement de variable $X=ax+b$, puis formule classique.
2. **Mélange** $\cos$ **et** $\sin$ **au premier degré :** $a\cos(x)+b\sin(x)=c$
   $\rightarrow$ Méthode de l'angle auxiliaire ($R\cos(x-\alpha)$).
3. **Puissances ou produits :** $\sin^2(x)$, $\cos(x)\sin(x)$, etc.
   $\rightarrow$ Changement de variable algébrique, formule de duplication, ou division par $\cos^2(x)$.
4. **Arguments différents :** $\sin(x)=\cos(2x)$
   $\rightarrow$ Tout exprimer en fonction de la même fonction et du même argument (formules de duplication).

Idée clé

Conseil d'examen : Avant de vous lancer dans des calculs complexes, **testez toujours les valeurs remarquables** $(0, \pm\frac{\pi}{6}, \pm\frac{\pi}{4}, \pm\frac{\pi}{3}, \pm\frac{\pi}{2})$. Dans de nombreux exercices, une solution simple "saute aux yeux" et permet de vérifier rapidement votre méthode générale.

Correction

Rappel des formules indispensables à maîtriser :

Type	Solutions générales
$\cos(x)=a$	$x=\pm\arccos(a)+2k\pi$
$\sin(x)=b$	$x=\arcsin(b)+2k\pi$ ou $\pi-\arcsin(b)+2k\pi$
$\tan(x)=c$	$x=\arctan(c)+k\pi$
$a\cos(x)+b\sin(x)=c$	$x=\alpha\pm\arccos(c/R)+2k\pi$

avec $k\in\mathbb{Z}$, $R=\sqrt{a^2+b^2}$, $\cos\alpha=a/R$, $\sin\alpha=b/R$.

Vous maîtrisez maintenant l'essentiel des équations trigonométriques !

La clé reste la pratique régulière et la maîtrise du cercle trigonométrique.
